KOMPLEKS FAZODA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR SISTEMALARINING YECHIMLARI MAVJUDLIGI VA YAGONALIGI

Saipnazarov Jonibek Muxammadiyevich
Qarshi davlat texnika universiteti
f-m.f.f.d (PhD), dotsenti
jonibeksaipnazarov@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.20488702

Annotatsiya. Mazkur maqolada kompleks fazoda aniqlangan differensial tenglamalar sistemalari uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligi masalalari tadqiq qilingan. Kompleks fazoda metrik va topologik xossalar asosida Koshi masalasining yechimlari o‘rganilgan. Shuningdek, Lipschitz sharti va Picard iteratsion usuli yordamida differensial tenglamalar sistemalarining yechimlari mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Tadqiqot davomida trayektoriyalar xossalari hamda kompleks fazoda aniqlangan dinamik sistemalarning ayrim nazariy jihatlari tahlil qilingan.

Kalit so‘zlar: kompleks fazo, kompleks sonlar maydoni, differensial tenglamalar, oddiy differensial tenglama, Koshi masalasi, Lipschitz sharti, Picard iteratsion usuli, Banax fazosi, metrik fazo, integral operator, differensial tenglamalar sistemasi, dinamik sistema, trayektoriya, limit to‘plam.

KIRISH

Differensial tenglamalar nazariyasi zamonaviy matematikaning eng muhim va keng qo‘llaniladigan bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Tabiatda, texnikada va ijtimoiy jarayonlarda yuz beradigan ko‘plab hodisalar vaqt yoki fazoga bog‘liq ravishda o‘zgarib boradi. Bunday jarayonlarni matematik jihatdan ifodalash va ularning kelajakdagi holatini oldindan aniqlashda differensial tenglamalar muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Ayniqsa, fizika, mexanika, biologiya, iqtisodiyot, elektrotexnika, avtomatik boshqaruv nazariyasi va kosmik tadqiqotlarda differensial tenglamalar keng qo‘llaniladi[1,2]. Kompleks fazoda aniqlangan differensial tenglamalar sistemalarini o‘rganish esa zamonaviy matematik analizning dolzarb yo‘nalishlaridan biridir. Kompleks sonlar maydoni ( ) algebraik va topologik jihatdan boy tuzilishga ega bo‘lib, differensial tenglamalar yechimlarining xatti-harakatlarini chuqurroq o‘rganish imkonini beradi. Kompleks fazoda trayektoriyalarni tadqiq qilish orqali dinamik sistemalarning barqarorligi, davriyligi va limit xossalarini aniqlash mumkin. Differensial tenglamalar sistemalari uchun asosiy masalalardan biri Koshi masalasi hisoblanadi. Koshi masalasining mohiyati berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimning mavjudligi va yagonaligini aniqlashdan iborat. Ushbu masala differensial tenglamalar nazariyasining markaziy muammolaridan biri bo‘lib, uning yechilishi matematik modellashtirishning ishonchliligini ta’minlaydi. Ayniqsa, Lipschitz sharti va Picard iteratsion usuli yordamida yechimning mavjudligi va yagonaligini asoslash nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega[3].

Dinamik sistemalar nazariyasida trayektoriyalar va fazaviy oqimlarning xossalarini o‘rganish muhim o‘rin egallaydi. Trayektoriya sistemaning vaqt davomida qanday rivojlanishini ifodalaydi. Agar sistema kompleks fazoda qaralsa, trayektoriyalar murakkab geometrik shakllarga ega bo‘lishi mumkin. Shu sababli kompleks fazoda differensial tenglamalarni o‘rganish dinamik jarayonlarning chuqur tahlilini amalga oshirish imkonini beradi. Mazkur maqolada kompleks fazoda aniqlangan differensial tenglamalar sistemalari uchun Koshi masalasi qaraladi. Tadqiqot davomida yechimlarning mavjudligi va yagonaligi masalalari tahlil qilinadi hamda Picard iteratsion usuli yordamida nazariy natijalar asoslanadi.

Shuningdek, kompleks fazoda trayektoriyalarning ayrim xossalari va differensial sistemalarning geometrik talqinlari ko‘rib chiqiladi. Tadqiqotning asosiy maqsadi kompleks fazoda differensial tenglamalar sistemalari uchun yechimlarning mavjudligi va yagonaligi shartlarini o‘rganish hamda ularning nazariy xossalarini tahlil qilishdan iborat. Tadqiqot natijalari differensial tenglamalar nazariyasi, funksional analiz va dinamik sistemalarni chuqurroq o‘rganishda muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. Olingan natijalar matematik fizika, avtomatik boshqaruv nazariyasi hamda murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish masalalarida qo‘llanilishi mumkin[4].

MASALANI QO‘YILISHI VA YECHISH METODIKASI.

Mazkur tadqiqotda kompleks fazoda aniqlangan differensial tenglamalar sistemalarini o‘rganish uchun matematik analiz, funksional analiz hamda differensial tenglamalar nazariyasining zamonaviy usullaridan foydalanildi. Tadqiqotning asosiy metodologik bazasini kompleks sonlar maydoni, metrik fazolar nazariyasi, integral operatorlar va iteratsion usullar tashkil etadi.

Kompleks fazoda differensial tenglamalarni tadqiq qilishda avvalo kompleks sonlar maydonining algebraik va topologik xossalari o‘rganildi. Kompleks fazoda norma va metrika tushunchalari kiritilib, ushbu fazoning to‘lalik xossasi tahlil qilindi. Metrik fazoning to‘laligi differensial tenglamalar yechimlarining mavjudligini asoslashda muhim ahamiyat kasb etadi.

Tadqiqot davomida Banaxning qisqaruvchi akslantirish prinsipi asosiy nazariy vositalardan biri sifatida qo‘llanildi. Ushbu prinsip yordamida integral operatorlarning qisqaruvchi operator ekanligi ko‘rsatilib, Koshi masalasi uchun yagona yechim mavjudligi asoslandi[5,6]. Xususan, differensial tenglamalar sistemasi integral tenglamaga keltirilib, Picard operatori qurildi.

Kompleks fazoda quyidagi differensial tenglama sistemasi qaraldi:

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z), \quad z(t_0) = z_0 \tag{1}$$

bu yerda ($f(t,z)$) uzluksiz funksiya bo‘lib, (z) o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipschitz shartini qanoatlantiradi. Tadqiqot davomida quyidagi Lipschitz sharti asosiy o‘rin egalladi:

$$[|f(t,z_1) - f(t,z_2)| \quad L\,|z_1 - z_2|] \tag{2}$$

Mazkur shart yordamida differensial tenglama sistemasi uchun yechimning yagonaligi asoslandi.

Tadqiqot davomida Koshi masalasini integral tenglamaga keltirish usulidan foydalanildi. Differensial tenglama quyidagi integral tenglamaga almashtirildi:

$$z_{n+1}(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z_n(s))ds \tag{3}$$

Iteratsion jarayonning yaqinlashuvchanligini asoslashda Banaxning qisqaruvchi akslantirish prinsipi qo‘llanildi. Integral operator:

$$(Tz)(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds \tag{4}$$

ko‘rinishda qaralib, uning qisqaruvchi operator ekanligi isbotlandi.

Tadqiqot davomida differensial tenglamalar sistemalarining trayektoriyalari va ularning kompleks tekislikdagi geometrik talqinlari ham o‘rganildi. Xususan, quyidagi differensial tenglama qaraldi:

$$\frac{dz}{dt} = iz, \qquad z(0) = 1 \tag{5}$$

Uning yechimi:

$$z(t) = e^{it}$$

ekanligi ko‘rsatildi.

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Natijada ushbu yechimning kompleks tekislikdagi trayektoriyasi birlik aylana bo‘ylab harakat qilishi aniqlandi. Mazkur metodologik yondashuv kompleks fazoda differensial tenglamalar sistemalari uchun yechimlarning mavjudligi, yagonaligi va trayektoriyalarining nazariy xossalarini chuqur tahlil qilish imkonini berdi.

SONLI NATIJALAR VA TAHLILI.

Kompleks fazoda differensial tenglamalar sistemalarini o‘rganish uchun avvalo kompleks sonlar maydoni va uning asosiy xossalarini qarash zarur. Kompleks sonlar maydoni quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$= \{z = a + bi \mid a, b \qquad , i^2 = -1\} \tag{6}$$

Bu yerda (a) — kompleks sonning haqiqiy qismi, (b) esa mavhum qismi hisoblanadi.

Kompleks sonning moduli quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$| z | = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{7}$$

Kompleks fazoda metrika:

$$\rho(z_1, z_2) = | z_1 - z_2 | \tag{8}$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

Mazkur metrika yordamida (($, \rho$)) to‘la metrik fazo hosil qiladi.

Tadqiqot davomida kompleks fazoda aniqlangan differensial tenglama sistemasi qaraldi:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) \tag{9}$$

Boshlang‘ich shart bilan birgalikda ushbu sistema Koshi masalasini tashkil qiladi:

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z), \qquad z(t_0) = z_0$$

Koshi masalasining asosiy maqsadi berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimning mavjudligi va yagonaligini aniqlashdan iborat.

Tadqiqotda yechimning mavjudligi va yagonaligini asoslash uchun Lipschitz sharti qo‘llanildi. Ushbu shart quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$| f(t,z_1) - f(t,z_2) | \quad L | z_1 - z_2 |$$

Bu yerda ($L > 0$) — o‘zgarmas son.

Lipschitz sharti bajarilganda Koshi masalasi uchun yagona yechim mavjud bo‘lishi Picard–Lindelöf teoremasi orqali asoslanadi.

Teorema; Agar ($f\left(t,z\right)$) funksiya:

1. (D) sohada uzluksiz bo‘lsa;
2. (z) o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipschitz shartini qanoatlantirsa,

u holda:

$$\frac{dz}{dt} = f(t,z), \qquad z(t_0) = z_0$$

Koshi masalasi yagona yechimga ega bo‘ladi.

Teoremani isbotlashda integral operator usulidan foydalaniladi. Differensial tenglama integral tenglamaga keltiriladi:

$$z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds$$

Shundan so‘ng Picard iteratsion ketma-ketligi quriladi:

$$z_{n+1}(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z_n(s))ds$$

Banaxning qisqaruvchi akslantirish prinsipi yordamida iteratsion ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligi ko‘rsatilib, limit funksiya differensial tenglamaning yagona yechimi ekanligi isbotlanadi.

Kompleks fazoda trayektoriyalarni geometrik jihatdan ham talqin qilish mumkin. Masalan, quyidagi differensial tenglama qaraymiz:

$$\frac{dz}{dt} = iz$$

Uning yechimi:

$$z(t) = e^{it}$$

Eyler formulasiga ko‘ra:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Natijada yechim kompleks tekislikda birlik aylana bo‘ylab harakat qilishi aniqlanadi. Bu esa differensial tenglamalar trayektoriyalarining geometrik xossalarini ifodalaydi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, kompleks fazoda differensial tenglamalar sistemalarining xatti-harakatlari real fazodagi sistemalarga nisbatan murakkabroq bo‘lib, trayektoriyalar turli geometrik shakllarni hosil qilishi mumkin. Ayniqsa, kompleks eksponensial funksiyalar yordamida davriy trayektoriyalar hosil bo‘lishi aniqlandi.

Shuningdek, differensial tenglamalar yechimlarining boshlang‘ich shartlarga bog‘liqligi ham tahlil qilindi. Boshlang‘ich qiymatdagi kichik o‘zgarishlar trayektoriyaning keyingi holatlariga ta’sir qilishi ko‘rsatildi. Ushbu holat dinamik sistemalar nazariyasida barqarorlik masalalarini o‘rganishda muhim ahamiyatga ega.

Olingan natijalar differensial tenglamalar nazariyasining ko‘plab amaliy masalalarida qo‘llanilishi mumkin. Jumladan:

- kvant mexanikasi;
- elektromagnit maydonlar nazariyasi;
- avtomatik boshqaruv sistemalari;
- matematik fizika;
- signal va tebranishlar nazariyasida

kompleks fazoda differensial tenglamalar muhim matematik model sifatida xizmat qiladi.

Mazkur tadqiqot kompleks fazoda differensial tenglamalar sistemalarini yanada chuqurroq o‘rganish uchun nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

XULOSA

Mazkur maqolada kompleks fazoda aniqlangan differensial tenglamalar sistemalarining yechimlari mavjudligi va yagonaligi masalalari tadqiq qilindi. Tadqiqot davomida kompleks sonlar maydoni, metrik fazolar va differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari o‘rganildi hamda kompleks fazoda aniqlangan differensial sistemalarning nazariy xossalari tahlil qilindi.

Tadqiqot natijasida kompleks fazoda aniqlangan Koshi masalasi uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi shartlari o‘rganildi. Xususan, ($f(t,z)$) funksiyaning uzluksizligi hamda Lipschitz shartini qanoatlantirishi differensial tenglama sistemasi uchun yagona yechim mavjud bo‘lishining asosiy sharti ekanligi ko‘rsatildi.

Tadqiqot davomida Picard iteratsion usuli va Banaxning qisqaruvchi akslantirish prinsipi yordamida differensial tenglamalar sistemasi uchun yechimning mavjudligi va yagonaligi nazariy jihatdan asoslandi. Integral operatorlar yordamida differensial tenglamalarni integral tenglamaga keltirish usuli samarali natija berishi aniqlandi.

Kompleks fazoda differensial tenglamalar trayektoriyalarining geometrik xossalari ham o‘rganildi. Xususan, eksponensial funksiyalar yordamida hosil bo‘ladigan trayektoriyalarning kompleks tekislikdagi harakati tahlil qilindi. Natijada ayrim differensial tenglamalar yechimlari kompleks tekislikda davriy trayektoriyalar hosil qilishi ko‘rsatildi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatdiki, kompleks fazoda differensial tenglamalar sistemalarini o‘rganish dinamik sistemalar nazariyasi, matematik fizika va kompleks analizning muhim masalalarini yechishda katta ahamiyatga ega. Olingan natijalar kvant mexanikasi, elektromagnit maydonlar nazariyasi, avtomatik boshqaruv sistemalari hamda signal va tebranishlar nazariyasida qo‘llanilishi mumkin. Kelgusida kompleks fazoda nolinear differensial tenglamalar sistemalari, ularning barqarorlik masalalari va xaotik

trayektoriyalarini o‘rganish ushbu yo‘nalishdagi istiqbolli ilmiy tadqiqotlardan biri hisoblanadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Arnold V.I. Ordinary Differential Equations. Springer, 1992.
2. Hartman P. Ordinary Differential Equations. Wiley, 1964.
3. Pontryagin L.S. Ordinary Differential Equations. Moscow, 1982.
4. Walter W. Ordinary Differential Equations. Springer, 1998.
5. Teschl G. Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems. AMS, 2012.
6. Coddington E., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill, 1955.