ПРИМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

Махмудова Насибахон Абдужабборовна
Ферганский государственный технический университет
старший преподаватель кафедры «Высшая математика»
Тел.: +998 90 232-26-03
E-mail: makhmudovanasiba74@gmail.com

Люсиков Артемий Александрович
студент группы 51-25 АТПП
Ферганский государственный технический университет
Doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.20492155

Аннотация: В данной работе рассматриваются особенности применения поверхностных интегралов в задачах математического анализа, физики и инженерии. Особое внимание уделяется трудностям, возникающим при аналитическом вычислении поверхностных интегралов, связанным с параметризацией поверхностей и сложностью интегрируемых выражений. Показано, что использование современных математических пакетов позволяет существенно упростить процесс вычислений, повысить их точность и снизить вероятность ошибок.

В работе приведён обзор наиболее распространённых вычислительных систем, таких как Wolfram Mathematica, Mathcad Prime и Maple, и описаны их возможности при решении задач, связанных с поверхностными интегралами. Также рассмотрен пример вычисления поверхностного интеграла первого рода для скалярного поля, демонстрирующий различие между ручным и компьютерным методами решения.

Ключевые слова: поверхностный интеграл, математические пакеты, Wolfram Mathematica, Mathcad Prime, Maple, численные методы, символьные вычисления, параметризация поверхности, математический анализ, вычислительная математика.

Введение:

Поверхностные интегралы являются важным инструментом математического анализа, который используется для описания различных процессов в физике, инженерии и прикладной математике. С их помощью можно исследовать распределение физических величин на поверхностях, вычислять потоки векторных полей и решать задачи, связанные с пространственными объектами сложной формы.

На практике вычисление поверхностных интегралов часто связано с существенными трудностями. Это обусловлено необходимостью правильной параметризации поверхности, вычисления элементов площади и последующего интегрирования сложных выражений. При усложнении геометрии задачи ручные вычисления становятся громоздкими и подверженными ошибкам.

В связи с этим особую актуальность приобретает использование математических пакетов, которые позволяют автоматизировать вычислительный процесс, повысить точность результатов и сократить время решения задач. Цель работы — анализ применения поверхностных интегралов с использованием современных вычислительных систем

Основная часть:

Поверхностный интеграл — это обобщение двойного интеграла на случай поверхности в трёхмерном пространстве. Он используется для вычисления суммарного эффекта некоторой величины, распределённой по поверхности[1].

Если поверхность задана в пространстве, то поверхностный интеграл позволяет учитывать её форму и ориентацию. В зависимости от задачи, подынтегральной функцией может выступать скалярное поле (например, плотность) или векторное поле (например, поток жидкости или электрического поля)[2].

Именно поэтому поверхностные интегралы широко применяются в физике, особенно в задачах электродинамики и гидродинамики, где важно учитывать не только значение функции, но и геометрию поверхности.

В математическом анализе обычно выделяют два основных вида поверхностных интегралов, которые отличаются по смыслу и области применения.

Первый тип — это поверхностный интеграл первого рода. Он используется в случае скалярных функций, то есть когда каждой точке поверхности сопоставлено некоторое число (например, плотность). Такой интеграл позволяет суммировать значение функции по всей поверхности с учётом её площади. На практике это может интерпретироваться как вычисление массы тонкой оболочки, если известна распределённая по ней плотность[3].

Второй тип — поверхностный интеграл второго рода. Он применяется для векторных полей и связан с понятием потока через поверхность[4]. В этом случае важно не только значение поля, но и его направление относительно поверхности. Такой интеграл позволяет определить, какое количество «величины» проходит через поверхность, например поток жидкости или электрического поля.

Оба типа поверхностных интегралов тесно связаны с геометрией поверхности и требуют её корректного задания в виде параметризации, что делает вычисления вычислительно трудоёмкими. Именно этот этап нередко вызывает наибольшие сложности при ручных вычислениях, особенно если поверхность имеет сложную форму.Поверхностные интегралы обладают свойствами, схожими с двойными и тройными интегралами, но учитывают геометрию и ориентацию поверхности.

К основным свойствам относятся линейность и аддитивность: интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, а область поверхности можно разбивать на части с последующим суммированием результатов[5].

Отдельно стоит отметить зависимость поверхностного интеграла от параметризации поверхности[6]. Одна и та же поверхность может быть задана разными способами, и правильный выбор параметров напрямую влияет на удобство вычислений.

В современной математической практике используется ряд программных систем, которые значительно упрощают вычисления и анализ сложных задач, включая поверхностные интегралы. В рамках данного исследования были использованы программные средства Wolfram Mathematica, Maple и Mathcad, позволяющие выполнять как аналитические, так и численные вычисления.

Wolfram Mathematica представляет собой систему вычислительного анализа, способную автоматически интерпретировать математические выражения и выполнять сложные вычисления. Данная система позволяет быстро находить аналитические решения интегралов, строить графики поверхностей и выполнять проверку полученных результатов. Особенно полезной она является при верификации ручных вычислений и сравнении аналитических ответов.

Maple ориентирован на символьные вычисления и математическое моделирование. Программа позволяет выполнять аналитическое интегрирование, преобразование выражений, упрощение формул и решение задач математического анализа. При работе с поверхностными интегралами Maple удобен тем, что способен автоматически выполнять громоздкие преобразования и вычисления, снижая вероятность вычислительных ошибок.

Mathcad Prime отличается удобной визуальной формой записи математических выражений, близкой к традиционному оформлению на бумаге. Программа широко применяется для инженерных и учебных расчётов, позволяя выполнять вычисления в наглядном формате. При решении задач на поверхностные интегралы Mathcad удобен для проверки промежуточных вычислений и получения численных результатов.

Рассмотрим задачу вычисления поверхностного интеграла первого рода для скалярного поля, заданного на поверхности.

Пусть требуется найти поверхностный интеграл функции:f(x, y, z) = z

по части поверхности параболоида: $z = x^2 + y^2$,

ограниченной плоскостью: z = 1.

Задача заключается в вычислении массы тонкой пластины с плотностью, зависящей от координаты z, при условии, что поверхность имеет указанную форму.

Практическая реализация вычисления поверхностных интегралов в математических пакетах

Для практического вычисления поверхностного интеграла первого рода был выполнен переход к полярным координатам, после чего задача сведена к двойному интегралу. Во всех рассматриваемых пакетах вычислялся эквивалентный двойной интеграл от функции $r^3\sqrt{(1 + 4r^2)}$ по области [0, 1] и [0, 2 Пи]. Ниже приведено описание процесса решения в трех различных вычислительных средах.

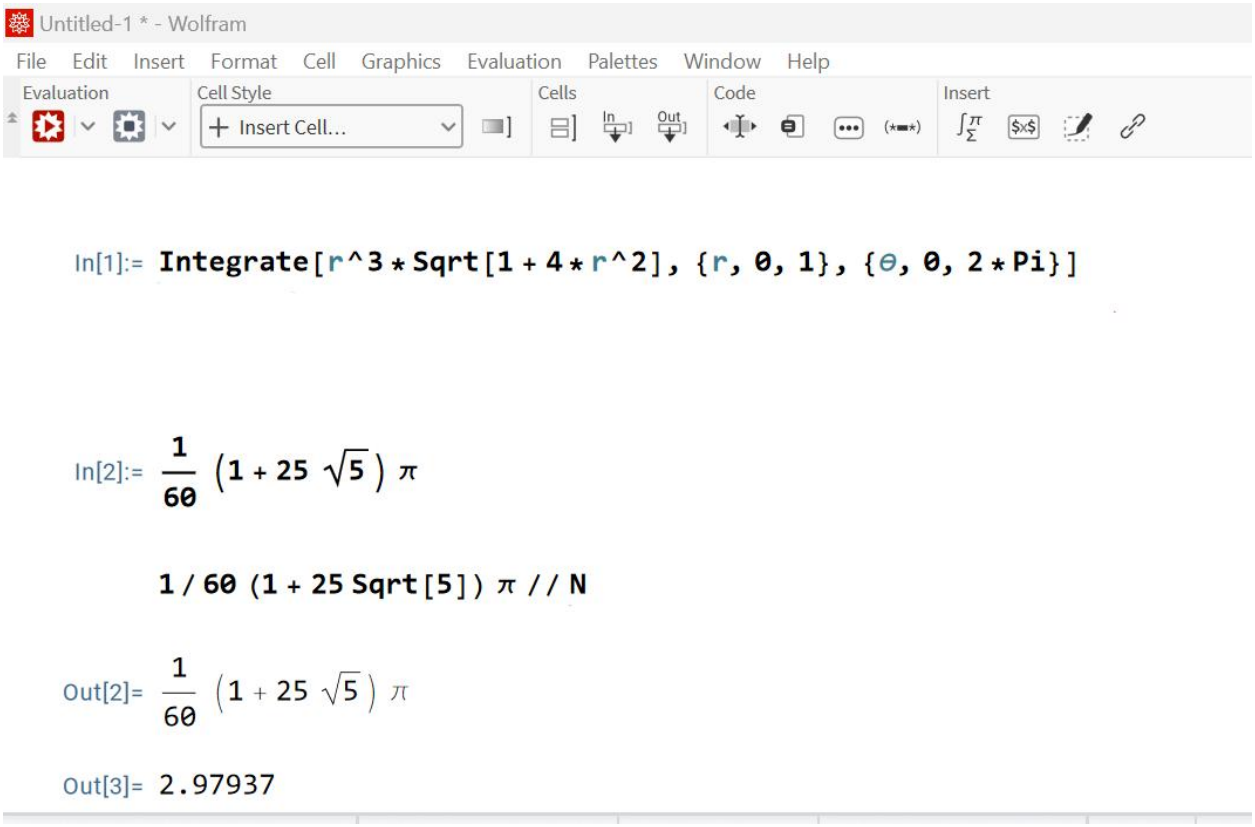

Рисунок 1 — Результаты вычисления поверхностного интеграла в Wolfram Mathematica

Система Wolfram Mathematica позволяет вычислить кратный интеграл с помощью единой встроенной команды Integrate.

Синтаксис ввода**:** Подынтегральное выражение и пределы интегрирования задаются в одной строке: Integrate[r^3 * Sqrt[1 + 4 * r^2], {r, 0, 1}, {θ, 0, 2*Pi}]

Аналитический расчет**:** По умолчанию программа проводит символьные вычисления и выдает точный ответ: $\frac{1}{60}\left(1+25\sqrt{5}\right)\pi$

Численный расчет**:** Для конвертации точного аналитического выражения в десятичную дробь был применен постфиксный оператор численной оценки // N. Итоговый численный результат составил 2.97937.

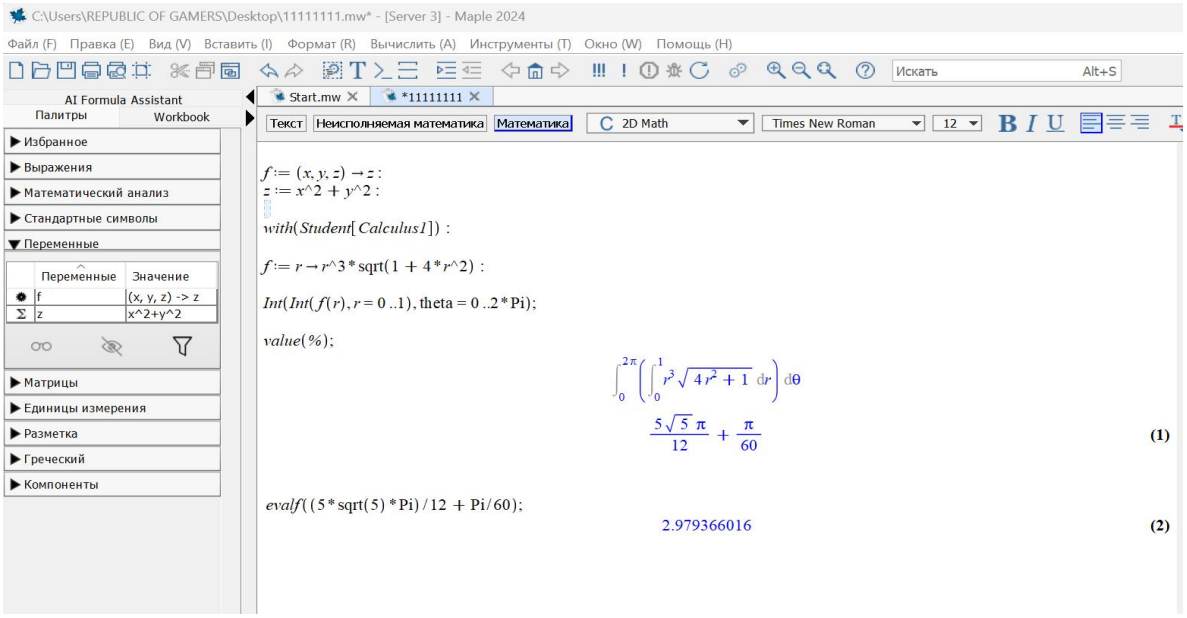

Рисунок 2 — Результаты вычисления поверхностного интеграла в Maple

В математическом пакете Maple решение построено в виде последовательного алгоритма с использованием специализированного пакета Student[Calculus1].

Синтаксис ввода: Сначала объявляется подынтегральная функция одной переменной: f := r -> r^3 * sqrt(1 + 4*r^2); *Далее с помощью функции Int (с заглавной буквы) конструируется математическая форма двойного интеграла без его немедленного вычисления: Int(Int(f(r), r = 0..1), theta = 0..2*Pi);*

Аналитический расчет: Для вычисления сформированного выражения вызывается команда value(%);. Maple выдает символьный ответ в виде: $5\sqrt{5}\pi/12 + \pi/60$ (что тождественно результату Wolfram Mathematica).

Численный расчет: Для получения приближенного численного значения применяется встроенная функция evalf(). Результат равен 2.979366016.

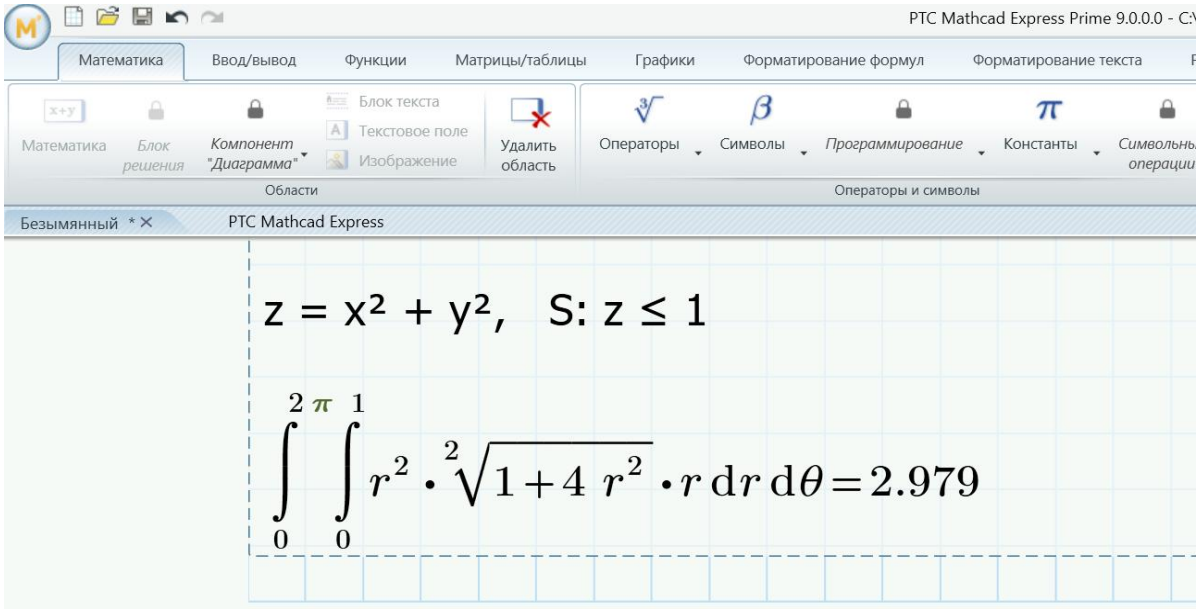

Рисунок 3 — Результаты вычисления поверхностного интеграла в Mathcad Prime

В отличие от систем компьютерной алгебры (Maple, Wolfram), Mathcad Prime обладает визуально-ориентированным интерфейсом (WYSIWYG), который позволяет вводить формулы в их естественном математическом виде.

Синтаксис ввода: Интеграл набирается с помощью графической панели операторов в классической двумерной нотации: ∫ (от 0 до 2π) ∫ (от 0 до 1) $r^2 \cdot \sqrt{(1 + 4r^2)} \cdot r\ dr\ d\theta$

Численный расчет: При использовании оператора обычного равенства (=) программа выполняет численное интегрирование. Пакет автоматически выполняет численное интегрирование и выводит результат 2.979, минуя этап вывода громоздких символьных (аналитических) выражений.

Анализ показывает, что системы Wolfram и Maple наиболее эффективно подходят для получения точных аналитических решений и выполнения символьных вычислений. При этом работа с данными программами требует понимания их синтаксиса и особенностей математической записи. В свою очередь, Mathcad Prime отличается более интуитивным интерфейсом и удобством при выполнении инженерных расчётов, где основной акцент делается на быстрое получение численного результата при сохранении привычной формы записи математических выражений.

Следует отметить, что ручное вычисление поверхностных интегралов представляет собой достаточно трудоёмкий процесс, включающий параметризацию поверхности, нахождение производных, переход к удобной системе координат и последующее интегрирование. Выполнение каждого из этих этапов требует внимательности и увеличивает вероятность вычислительных ошибок.

Использование математических пакетов позволяет значительно упростить процесс решения подобных задач за счёт автоматизации наиболее сложных этапов вычислений, включая символьное и численное интегрирование. Это избавляет от необходимости выполнять громоздкие алгебраические преобразования вручную и позволяет существенно сократить время расчётов.

Вместе с тем ручной метод сохраняет важное значение, поскольку способствует более глубокому пониманию математической сущности задачи и логики вычислений. В данном случае компьютерные системы выступают не заменой математического подхода, а эффективным инструментом проверки и ускорения расчётов.

Вывод:

В ходе проведённого исследования были рассмотрены особенности вычисления поверхностных интегралов и проанализированы трудности, возникающие при их аналитическом решении. Установлено, что основная сложность вычислений связана с необходимостью корректной параметризации поверхности, нахождением элемента площади и выполнением громоздких алгебраических преобразований, что делает ручной метод трудоёмким и увеличивает вероятность вычислительных ошибок.

На примере вычисления поверхностного интеграла первого рода для скалярного поля на поверхности параболоида было выполнено сравнение ручного и компьютерного подходов к решению задачи. Полученные результаты показали совпадение аналитического и численного решений, что подтверждает корректность выполненных преобразований и эффективность использования вычислительных систем для проверки математических расчётов.

Сравнительный анализ используемых программных средств показал, что Wolfram Mathematica и Maple наиболее эффективно подходят для выполнения символьных вычислений, аналитического интегрирования и получения точных математических выражений. В свою очередь, Mathcad Prime отличается удобством визуального ввода формул и более ориентирован на выполнение численных инженерных расчётов, позволяя быстро получать итоговые результаты в привычной математической записи.

Таким образом, использование математических пакетов при решении задач, связанных с поверхностными интегралами, позволяет существенно сократить время вычислений, повысить точность результатов и снизить вероятность ошибок. При этом ручной метод сохраняет важное значение, поскольку обеспечивает понимание математической сущности задачи, а компьютерные системы выступают эффективным инструментом проверки и ускорения вычислительного процесса.

Список используемой литературы:

1. Поверхностные интегралы. Понятие и примеры решений [Электронный ресурс]: mathprofi.ru URL: https://mathprofi.ru/poverhnostnye_integraly.html (дата обращения 24.05.2026)
2. Нуртдинов Р. Р. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ // Форум молодых ученых. 2016. №2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/poverhnostnye-integraly (дата обращения: 24.05.2026).
3. Поверхностный интеграл i рода (по площади поверхности) [Электронный ресурс]: Корпоративный портал – Томский политех URL: https://portal.tpu.ru/SHARED/r/ROZHKOVA/page-3/page-8/Tab1/MA(3)_Lecture-23.pdf (дата обращения 24.05.2026)
4. Поверхностный интеграл второго рода. Физический смысл поверхностного интеграла второго рода. Формула Стокса [Электронный ресурс]: Farabi University URL: https://farabi.university/storage/files/29138185736730b5bbab9e4024227152_Vector_analysis__Lecture_Notes-7_ru.pdf (дата обращения 24.05.2026)
5. Рабчук А.С, Самигуллина Р.Г. Приложения поверхностных интегралов. Часть 2 [Электронный ресурс]: Электронный научно-практический журнал «Современная педагогика» URL: https://pedagogika.snauka.ru/2015/02/3714 (дата обращения 24.05.2026)
6. Поверхностный интеграл 1 рода [Электронный ресурс]: Кафедра высшей математики и математической физики Санкт-Петербургского государственного университет URL: http://mph1.phys.spbu.ru/~budylin/meth/node10.html (дата обращения 24.05.2026)