ILM-FAN XABARNOMASI, SCIENCE BULLETIN, ВЕСТНИК НАУКИ
ISSN: 3030-3931 Volume 13, issue 2, May
https://doi.org/10.5281/zenodo.20050561
026

UCHBURCHAK AJOYIB NUQTALARI XOSSALARI

Yangiboyeva Xurshida Rahimberganovna
Osiyo xalqaro universiteti matematika
yo'nalishi 1-bosqich magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20052539

Annotatsiya. Ushbu maqolada uchburchakning ajoyib nuqtalari — centroid, incenter, circumcenter va orthocenterning geometrik va algebraik xossalari tahlil qilingan. Ushbu nuqtalarning o‘zaro bog‘liqligi, Euler chizig‘i orqali kollinearligi hamda barysentirik koordinatalar yordamida ifodalanishi yoritilgan. Zamonaviy matematik yondashuvlar asosida ushbu nuqtalarning optimallashtirish masalalari, hisoblash geometriyasi va kompyuter modellashtirishdagi ahamiyati ko‘rib chiqilgan. Tadqiqot natijalari uchburchak ajoyib nuqtalarining nafaqat klassik geometriyada, balki amaliy matematikada ham muhim rol o‘ynashini ko‘rsatadi.
Kalit so‘zlar: uchburchak, centroid, incenter, circumcenter, orthocenter, Euler chizig‘i, barysentirik koordinata, geometriya, optimallashtirish, matematik model.

Аннотация. В данной статье анализируются свойства замечательных точек треугольника — центроида, инцентра, ортоцентра и центра описанной окружности. Рассматриваются их взаимосвязи, коллинеарность на прямой Эйлера и представление с помощью барицентрических координат. Особое внимание уделяется современным методам математического моделирования, вычислительной геометрии и задачам оптимизации. Показано, что данные точки играют важную роль не только в классической евклидовой геометрии, но и в прикладных областях математики. Полученные результаты подчеркивают значимость изучения замечательных точек треугольника в современных научных исследованиях.
Ключевые слова: треугольник, центроид, инцентр, ортоцентр, центр описанной окружности, прямая Эйлера, барицентрические координаты, геометрия, оптимизация, математическая модель.

Abstract. This article analyzes the properties of remarkable points of a triangle, including the centroid, incenter, circumcenter, and orthocenter. Their interrelationships, collinearity on the Euler line, and representation using barycentric coordinates are discussed. Modern mathematical approaches highlight their importance in optimization problems, computational geometry, and computer modeling. The study shows that these points are not only fundamental in classical Euclidean geometry but also play a significant role in applied mathematics. The results emphasize the relevance of studying triangle centers in contemporary mathematical research and applications.
Keywords: triangle, centroid, incenter, circumcenter, orthocenter, Euler line, barycentric coordinates, geometry, optimization, mathematical model.

Kirish. Uchburchak — evklid geometriyasining eng asosiy va eng ko‘p o‘rganiladigan geometrik figurasi bo‘lib, uning xossalari qadimdan boshlab hozirgi zamonaviy matematik tadqiqotlargacha bo‘lgan davrda muhim ilmiy ahamiyat kasb etib kelmoqda. Uchburchakning sodda ko‘rinishiga qaramasdan, uning ichki tuzilishi juda murakkab va chuqur geometrik munosabatlarni o‘z ichiga oladi. Ushbu munosabatlar faqat uning tomonlari va burchaklari bilan cheklanib qolmay, balki maxsus geometrik nuqtalar — ya’ni “ajoyib nuqtalar” orqali yanada

to‘liq ifodalanadi. Uchburchakning ajoyib nuqtalari geometriyada markaziy o‘rin tutuvchi tushunchalardan biri hisoblanadi. Ularga mediana kesishish nuqtasi (og‘irlik markazi yoki centroid), bissektrisalar kesishish nuqtasi (ichki chizilgan aylana markazi yoki incenter), perpendikulyar o‘rtalar kesishish nuqtasi (sirkummarkaz yoki circumcenter) hamda balandliklar kesishish nuqtasi (ortosentr yoki orthocenter) kiradi. Ushbu nuqtalarning har biri uchburchakning turli geometrik xossalarini ifodalaydi va ularning o‘zaro bog‘liqligi geometriyaning eng muhim teoremalaridan birini tashkil etadi.

Centroid, ya’ni og‘irlik markazi, uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi sifatida aniqlanadi va u uchburchak ichki tuzilishining muvozanat markazini ifodalaydi. Fizik nuqtai nazardan qaralganda, bu nuqta bir jinsli uchburchak plastinkaning og‘irlik markaziga to‘g‘ri keladi. Zamonaviy matematik yondashuvlarda centroid vektorlar yordamida juda qulay ifodalanadi, ya’ni uning koordinatalari uchburchak uchlarining o‘rtacha qiymati sifatida olinadi. Bu esa uning hisoblash jarayonlarini soddalashtirib, kompyuter grafikasi va raqamli modellashtirishda keng qo‘llanilishiga sabab bo‘ladi.

Incenter — uchburchak ichki bissektrisalari kesishgan nuqta bo‘lib, u uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi sifatida qaraladi. Bu nuqta uchburchak tomonlariga teng masofada joylashgan yagona ichki nuqta hisoblanadi. Shuning uchun u optimallashtirish masalalarida muhim rol o‘ynaydi, chunki u geometrik jihatdan minimal masofa xossalariga ega bo‘lgan markazlardan biridir. Incenterning barysentirik koordinatalar orqali ifodalanishi uning algebraik tahlilini osonlashtiradi va turli matematik modellarda qo‘llash imkonini beradi.

Circumcenter — uchburchak tomonlarining perpendikulyar o‘rtalari kesishish nuqtasi bo‘lib, u uchburchak uchlaridan teng uzoqlikda joylashgan yagona nuqtadir. Ushbu nuqta uchburchak tashqi aylanasining markazi hisoblanadi. Zamonaviy geometriyada circumcenter triangulyatsiya algoritmlarida, xususan Delaunay triangulyatsiyasida muhim rol o‘ynaydi. Bu algoritmlar kompyuter grafikasi, geografik axborot tizimlari va raqamli tasvirlarni qayta ishlashda keng qo‘llaniladi. Circumcenterning metrik invariantligi uni turli geometrik transformatsiyalar ostida barqaror obyekt sifatida ko‘rib chiqish imkonini beradi. Orthocenter esa uchburchak balandliklarining kesishish nuqtasi bo‘lib, uning joylashuvi uchburchak turiga bog‘liq holda o‘zgaradi. O‘tkir burchakli uchburchakda u ichki sohada, to‘g‘ri burchakli uchburchakda to‘g‘ri burchak uchida, o‘tmas burchakli uchburchakda esa uchburchak tashqarisida joylashadi. Orthocenterning bu xossasi uning geometriyada dinamik tabiati borligini ko‘rsatadi. Euler chizig‘i orqali centroid, circumcenter va orthocenterning bir to‘g‘ri chiziqda joylashishi esa geometriyada juda muhim strukturaviy bog‘lanishlardan biridir.

So‘nggi yillarda geometriyaning klassik bo‘limlari zamonaviy algebraik, vektor va koordinata usullari bilan chuqur integratsiyalashib bormoqda. Bu esa uchburchakning ajoyib nuqtalarini faqat geometrik emas, balki algebraik obyekt sifatida ham o‘rganish imkonini bermoqda. Xususan, barysentirik koordinatalar tizimi ushbu nuqtalarni yagona matematik apparat orqali ifodalashga imkon beradi. Natijada ularning xossalarini umumlashtirish va yuqori o‘lchovli fazolarga tatbiq etish osonlashadi. Bundan tashqari, uchburchak ajoyib nuqtalarining invariant xossalari zamonaviy matematik tadqiqotlarning muhim yo‘nalishlaridan biriga aylangan. Transformatsiyalar, xususan affiin va proyektiv transformatsiyalar ostida ushbu nuqtalarning saqlanish yoki o‘zgarish xususiyatlari chuqur o‘rganilmoqda. Bu esa geometriyaning nazariy asoslarini yanada kengaytiradi.

Uchburchakning ajoyib nuqtalari nafaqat nazariy geometriyada, balki amaliy matematika, kompyuter grafikasi, muhandislik hisoblari, robototexnika va optimallashtirish masalalarida ham keng qo‘llaniladi. Masalan, tarmoq dizayni, minimal masofa masalalari va fazoviy modellashtirishda ushbu nuqtalarning xossalari asosiy matematik vosita sifatida ishlatiladi. Shu sababli, uchburchakning ajoyib nuqtalarini tizimli o‘rganish nafaqat matematik nazariyani

ILM-FAN XABARNOMASI, SCIENCE BULLETIN, ВЕСТНИК НАУКИ
ISSN: 3030-3931 Volume 13, issue 2, May
https://doi.org/10.5281/zenodo.20050561
026

rivojlantirish, balki amaliy muammolarni samarali hal qilishda ham muhim ahamiyat kasb etadi. Ularning xossalarini chuqur tahlil qilish zamonaviy geometriya va hisoblash matematikasining rivojlanishiga katta hissa qo‘shadi.

Adabiyotlar tahlili. Uchburchak geometriyasi klassik matematikaning eng chuqur va barqaror rivojlangan bo‘limlaridan biri hisoblanadi. Ushbu sohada o‘rganiladigan asosiy obyektlardan biri — uchburchakning ajoyib nuqtalari bo‘lib, ular nafaqat evklid geometriyasining markaziy tushunchalarini ifodalaydi, balki zamonaviy matematik yondashuvlarda ham muhim rol o‘ynaydi. So‘nggi yillarda nashr etilgan geometriyaga oid ilmiy manbalarda ushbu nuqtalarning algebraik, vektor va koordinata usullari orqali tahlili keng yoritilgan bo‘lib, ular klassik sintetik geometriya bilan integratsiyalashgan holda ko‘rib chiqilmoqda.

Uchburchakning asosiy ajoyib nuqtalaridan biri og‘irlik markazi (centroid) bo‘lib, u medianalarning kesishish nuqtasi sifatida aniqlanadi. Zamonaviy matematik manbalarda centroidning vektor ko‘rinishi juda muhim o‘rin tutadi, ya’ni u uchburchak uchlarining koordinatalarining o‘rtacha qiymati sifatida ifodalanadi. Bu yondashuv kompyuter geometriyasi va grafik modellashtirishda keng qo‘llaniladi. So‘nggi tadqiqotlarda centroidning dinamik tizimlardagi barqarorlik markazi sifatidagi roli ham o‘rganilmoqda, bu esa uni nafaqat geometrik, balki fizik interpretatsiyada ham muhim qiladi. Incenter, ya’ni ichki chizilgan aylana markazi, uchburchak bissektrisalari kesishgan nuqta sifatida qaraladi. Zamonaviy geometriya adabiyotlarida incenterning masofa minimizatsiya xossasi alohida e’tibor qozongan. Xususan, u uchburchak tomonlarigacha bo‘lgan masofalar teng bo‘lgan yagona ichki nuqta sifatida qaraladi. Optimallashtirish nazariyasida incenterning geometrik medianaga yaqinligi muhim tadqiqot obyekti hisoblanadi. Bu xossa uni logistik va tarmoq optimallashtirish masalalarida qo‘llash imkonini beradi.

Sirkummarkaz (circumcenter) uchburchak tomonlarining perpendikulyar o‘rtalarining kesishish nuqtasi bo‘lib, u uchburchak uchlaridan teng uzoqlikda joylashadi. So‘nggi matematik yondashuvlarda sirkummarkaz Evklid fazosida metrik invariant nuqta sifatida o‘rganilmoqda. Bu nuqta atrofida quriladigan sirkumaylana kompyuter grafikasi, triangulyatsiya algoritmlari va GIS tizimlarida asosiy strukturalardan biri hisoblanadi. Zamonaviy ilmiy ishlarda sirkummarkazning n-o‘lchovli fazolarga umumlashtirilishi ham muhim yo‘nalish sifatida ko‘rsatilgan. Ortosentr (orthocenter) uchburchak balandliklarining kesishish nuqtasi bo‘lib, uning xossalari klassik geometriyada chuqur o‘rganilgan. Yangi tadqiqotlarda ortosentrning boshqa ajoyib nuqtalar bilan bog‘liqligi, xususan Euler chizig‘i orqali centroid va sirkummarkaz bilan kollinear joylashuvi keng tahlil qilinmoqda. Euler chizig‘i konsepsiyasi zamonaviy geometriyada struktural bog‘lanishlarni tushunishda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Bundan tashqari, ortosentrning uchburchak turi o‘zgarishiga nisbatan sezgirligi transformatsion geometriyada alohida o‘rganiladi.

Uchburchakning ajoyib nuqtalari orasidagi munosabatlar ham zamonaviy adabiyotlarda keng yoritilgan. Masalan, Euler chizig‘i faqat to‘g‘ri burchakli uchburchaklardan tashqari barcha uchburchaklarda centroid, sirkummarkaz va ortosentrni bir chiziqqa joylashtirishi geometriyaning muhim teoremasi sifatida qaraladi. Bu chiziqning geometrik invariantligi turli transformatsiyalar, jumladan, affiin va inversiya transformatsiyalari ostida ham o‘rganilmoqda. So‘nggi yillarda barysentirik koordinatalar tizimi uchburchak ajoyib nuqtalarini ifodalashda juda samarali vosita sifatida keng qo‘llanilmoqda. Bu tizim yordamida uchburchak ichidagi har qanday nuqtani uch uchiga nisbatan og‘irlik koeffitsiyentlari orqali ifodalash mumkin. Bu yondashuv zamonaviy hisoblash geometriyasi, kompyuter grafikasi va mesh-generatsiya algoritmlarida asosiy matematik apparat sifatida xizmat qilmoqda. Shuningdek, uchburchakning

Napoleon nuqtalari, Fermat nuqtasi va Brocard nuqtalari kabi qo‘shimcha ajoyib nuqtalari ham zamonaviy ilmiy ishlarda keng o‘rganilmoqda. Bu nuqtalar klassik uchburchak elementlaridan tashqarida bo‘lsa-da, ular orasidagi geometrik bog‘liqliklar murakkab optimallashtirish masalalarini yechishda muhim ahamiyat kasb etadi. Xususan, Fermat nuqtasi minimal umumiy masofa xossasi bilan tanilgan bo‘lib, tarmoq dizayni va transport tizimlarida qo‘llaniladi.

Zamonaviy tadqiqotlarda uchburchak ajoyib nuqtalarining kompleks tekislikdagi ifodasi ham katta ahamiyatga ega. Kompleks koordinatalar yordamida bu nuqtalarni algebraik shaklda ifodalash ularning simmetriya va transformatsion xossalarini chuqurroq tushunishga yordam beradi. Bu yondashuv ayniqsa algebraik geometriya va kompleks analizda keng qo‘llaniladi. Umuman olganda, adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, uchburchakning ajoyib nuqtalari nafaqat klassik geometriyaning ajralmas qismi, balki zamonaviy matematikaning ko‘plab yo‘nalishlari — hisoblash geometriyasi, optimallashtirish nazariyasi, algebraik geometriya va kompyuter modellashtirish bilan chambarchas bog‘liqdir. Ushbu nuqtalarning xossalarini chuqur o‘rganish yangi matematik modellarning yaratilishiga va amaliy masalalarni samarali yechishga katta hissa qo‘shadi.

Tadqiqot muhokamasi. Uchburchakning ajoyib nuqtalari geometriyaning fundamental tushunchalaridan biri bo‘lib, ular nafaqat klassik evklid geometriyasida, balki zamonaviy matematik yondashuvlarda ham muhim o‘rin egallaydi. Ushbu tadqiqotda centroid, incenter, circumcenter va orthocenter kabi asosiy nuqtalarning xossalari hamda ularning o‘zaro bog‘liqligi tahlil qilindi.

Centroid — uchburchak medianalarining kesishish nuqtasi sifatida qaraladi va u geometrik jihatdan uchburchakning “massalar markazi”ni ifodalaydi. Tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, centroid vektorlar orqali juda sodda ifodalanadi: u uchburchak uchlarining koordinatalarining o‘rtacha qiymati sifatida aniqlanadi. Bu xossa centroidni hisoblashni soddalashtiribgina qolmay, balki uni mexanik tizimlarda muvozanat nuqtasi sifatida qo‘llash imkonini beradi. Zamonaviy kompyuter grafikasi va fizika modellarida centroidning ushbu xossasi obyektlarning barqarorlik markazini aniqlashda keng qo‘llaniladi. Incenter uchburchak ichki bissektrisalari kesishgan nuqta bo‘lib, u uchburchak ichiga chizilgan aylananing markazini ifodalaydi. Tadqiqot natijalari incenterning optimallik xossasini ko‘rsatadi, ya’ni u uchburchak tomonlarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisini minimallashtiruvchi yagona ichki nuqta hisoblanadi. Bu xossa uni transport tarmoqlarini loyihalash, resurslarni optimal joylashtirish kabi amaliy masalalarda muhim qiladi. Bundan tashqari, incenterning barysentirik koordinatalar orqali ifodalanishi uning algebraik tahlilini yanada osonlashtiradi.

Circumcenter uchburchak tomonlariga o‘tkazilgan perpendikulyar o‘rtalar kesishish nuqtasi sifatida aniqlanadi. U uchburchak uchlaridan teng uzoqlikda joylashgan yagona nuqta bo‘lib, bu xossa uni geometriyada markaziy simmetriya nuqtasi sifatida muhim qiladi. Tadqiqotlar circumcenterning triangulyatsiya algoritmlaridagi rolini ko‘rsatadi. Xususan, Delaunay triangulyatsiyasi va Voronoi diagrammalarida circumcenter asosiy geometrik element sifatida ishlatiladi. Bu esa uning hisoblash geometriyasidagi ahamiyatini yanada oshiradi. Orthocenter uchburchak balandliklarining kesishish nuqtasi bo‘lib, uning joylashuvi uchburchak turiga bog‘liq ravishda o‘zgaradi. O‘tkir burchakli uchburchakda orthocenter ichki sohada, to‘g‘ri burchakli uchburchakda esa to‘g‘ri burchak uchida, o‘tmas burchakli uchburchakda esa tashqarida joylashadi. Tadqiqotlar Euler chizig‘i orqali orthocenter, centroid va circumcenter o‘rtasidagi chiziqli bog‘lanishni ochib beradi. Bu chiziq geometriyada strukturaviy invariantlikni ifodalovchi muhim konsept hisoblanadi.

Uchburchakning ajoyib nuqtalari orasidagi munosabatlar ham chuqur o‘rganilgan. Euler chizig‘i ushbu nuqtalarning kollinearligini ko‘rsatadi, biroq incenter bu chiziqda joylashmaydi,

bu esa geometriyada simmetriya va asimmetriya tushunchalarining muhim farqini ochib beradi. Shuningdek, Euler chizig‘i segmentlari orasidagi nisbatlar uchburchakning shakliga bog‘liq bo‘lib, bu nisbatlar invariant emas, balki geometriya transformatsiyalariga sezgir hisoblanadi. So‘nggi tadqiqotlarda barysentirik koordinatalar tizimi ushbu nuqtalarni umumiy algebraik shaklda ifodalashda asosiy vosita sifatida qo‘llanilmoqda. Bu yondashuv uchburchak ichidagi istalgan nuqtani uch uchiga nisbatan og‘irliklar orqali ifodalash imkonini beradi. Natijada, ajoyib nuqtalarning algebraik ifodasi soddalashadi va ularni kompyuter algoritmlarida qo‘llash samaradorligi oshadi. Shuningdek, uchburchakning maxsus nuqtalari orasida Fermat va Napoleon nuqtalari kabi qo‘shimcha markazlar ham muhim o‘rin tutadi. Fermat nuqtasi umumiy masofani minimallashtiruvchi nuqta sifatida tarmoq optimallashtirishda qo‘llaniladi. Napoleon nuqtalari esa tashqi teng tomonli uchburchaklar qurish orqali hosil bo‘lib, ular geometrik simmetriya va transformatsiyalarni o‘rganishda muhim rol o‘ynaydi. Umuman olganda, tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, uchburchak ajoyib nuqtalari nafaqat klassik geometriyaning obyektlari, balki zamonaviy matematik modellashtirish, algoritmik geometriya va amaliy optimallashtirish masalalarining ham ajralmas qismi hisoblanadi. Ularning xossalarini chuqur o‘rganish yangi matematik yondashuvlar va samarali hisoblash usullarini ishlab chiqishga xizmat qiladi.

Xulosa. Uchburchakning ajoyib nuqtalari geometriyaning eng muhim va chuqur o‘rganiladigan elementlaridan biridir. Centroid, incenter, circumcenter va orthocenter kabi nuqtalar uchburchakning ichki tuzilishini ifodalashda asosiy rol o‘ynaydi. Ularning har biri o‘ziga xos geometrik va algebraik xossalarga ega bo‘lib, bu xossalar zamonaviy matematik yondashuvlarda keng qo‘llaniladi. Tadqiqot natijalari ushbu nuqtalarning nafaqat klassik geometriyada, balki kompyuter grafikasi, optimallashtirish va hisoblash geometriyasida ham muhim ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatadi. Euler chizig‘i va barysentirik koordinatalar kabi tushunchalar ularning o‘zaro bog‘liqligini chuqurroq tushunishga yordam beradi. Shu sababli, uchburchakning ajoyib nuqtalarini o‘rganish matematik nazariya va amaliyot o‘rtasidagi muhim ko‘prik bo‘lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (Geometry Revisited). Mathematical Association of America.
2. Johnson, R. A. (Advanced Euclidean Geometry). Dover Publications.
3. Pedoe, D. (Geometry: A Comprehensive Course). Dover Publications.
4. Bottema, O., et al. (Geometric Inequalities). Springer.
5. Kimberling, C. (Encyclopedia of Triangle Centers). University of Evansville.
6. Yaglom, I. M. (Geometric Transformations). Mathematical Association of America.
7. Wells, D. (The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry). Penguin Books.