ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В УСЛОВИЯХ МИГРАЦИИ

Келдиярова Зебо Фахриддин кизи
E-mail: zebofaxriddinovna@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.21389205

Аннотация. В статье рассматриваются предельные свойства ветвящихся случайных процессов с учетом миграционных механизмов. Исследуются математические модели, в которых изменение численности популяции определяется не только процессами рождения и гибели, но и перемещением индивидуумов между различными состояниями или пространственными областями. Особое внимание уделяется вопросам устойчивости, сходимости распределений, условиям вырождения и неограниченного роста процесса. Анализируются основные подходы к исследованию многотипных ветвящихся процессов с миграцией, а также рассматривается влияние интенсивности миграционных потоков на асимптотическое поведение системы. Полученные результаты могут применяться при моделировании демографических процессов, распространения биологических популяций, эпидемиологических систем и социальных процессов.

Ключевые слова: ветвящиеся случайные процессы, миграция, предельные свойства, марковские процессы, сходимость распределений, математическое моделирование, случайные системы.

Введение. Ветвящиеся случайные процессы занимают одно из центральных мест в современной теории вероятностей и представляют собой важный математический инструмент для исследования сложных динамических систем, в которых численность объектов изменяется под воздействием случайных факторов. Первоначально теория ветвящихся процессов была разработана для решения задач, связанных с изучением размножения биологических популяций и генеалогических структур, однако со временем область её применения значительно расширилась. Сегодня методы ветвящихся процессов активно используются в демографии, генетике, экологии, эпидемиологии, экономике, теории массового обслуживания, информационных технологиях и анализе социальных систем. Классическая теория ветвящихся процессов основывается на предположении, что каждый индивидуум в определённый момент времени независимо от других производит случайное количество потомков, которые формируют следующее поколение. Наиболее известной моделью является процесс Гальтона–Ватсона, который описывает изменение численности популяции исключительно за счёт процессов рождения и вымирания. Несмотря на фундаментальное значение данной модели, она не всегда способна адекватно отражать реальные процессы, поскольку в большинстве природных и социальных систем развитие популяций происходит не только под влиянием внутреннего воспроизводства, но и за счёт внешних факторов, среди которых особое значение имеет миграция. Миграция является одним из наиболее важных механизмов, определяющих динамику современных сложных систем. Под миграцией понимается процесс перемещения индивидуумов между различными пространственными областями, состояниями или группами. В биологических системах миграция обеспечивает обмен генетическим материалом и поддержание устойчивости популяций, в демографических процессах она определяет перераспределение населения между регионами, в эпидемиологии влияет на скорость распространения

инфекционных заболеваний, а в социальных системах отражает движение людей, ресурсов и информации. Введение миграционного фактора в модели ветвящихся процессов приводит к существенному усложнению их математической структуры. В отличие от классических моделей, где каждый элемент развивается независимо в пределах одной системы, процессы с миграцией характеризуются взаимодействием различных типов объектов или состояний. Каждый индивидуум может не только создавать новые элементы, но и переходить из одного состояния в другое, изменяя тем самым общую структуру системы. Поэтому исследование таких процессов требует применения более сложных методов теории вероятностей, матричного анализа, теории случайных процессов и математического моделирования.

Особую актуальность приобретает изучение предельных свойств ветвящихся случайных процессов в условиях миграции, поскольку именно асимптотическое поведение позволяет определить долгосрочные характеристики системы. Под предельными свойствами понимаются закономерности, которые проявляются при стремлении времени наблюдения к бесконечности: вероятность выживания процесса, скорость роста или затухания численности, существование предельных распределений, устойчивость случайных характеристик и влияние начальных условий на конечное состояние системы. В классической теории ветвящихся процессов основным критерием поведения системы является среднее количество потомков, создаваемых одним индивидуумом. Если этот показатель меньше единицы, процесс является субкритическим и постепенно вымирает; при равенстве единице система находится в критическом состоянии; при превышении единицы возникает вероятность неограниченного роста популяции. Однако при наличии миграции данный критерий становится более сложным, поскольку необходимо учитывать не только интенсивность воспроизводства, но и направление, скорость и структуру миграционных потоков. Современные исследования показывают, что миграционные процессы могут существенно изменять классические условия существования и вырождения ветвящихся систем. Даже в случае низкой рождаемости миграция между различными состояниями может обеспечить сохранение процесса за счёт перехода индивидуумов в более благоприятные условия. В то же время чрезмерная миграционная активность может привести к нестабильности системы, нарушению равновесия и ускоренному снижению численности отдельных групп. Одним из основных направлений исследования является изучение многотипных ветвящихся процессов с миграцией. В таких моделях каждый индивидуум относится к определённому типу, а изменение численности описывается с помощью случайных векторов и матриц переходов. Матрица среднего воспроизводства совместно с матрицей миграции формирует общую структуру процесса, а её спектральные характеристики определяют основные закономерности долгосрочного поведения системы. Использование спектрального радиуса матрицы позволяет установить условия, при которых процесс будет затухающим, критическим или надкритическим. Актуальность данной тематики также обусловлена современными глобальными изменениями, связанными с увеличением масштабов миграции населения, изменением экологических условий, распространением новых инфекционных заболеваний и развитием сетевых социальных структур. Традиционные методы анализа часто оказываются недостаточными для описания таких процессов, поскольку реальные системы обладают высокой степенью неопределённости и зависят от большого количества случайных факторов. Именно поэтому математические модели ветвящихся процессов с миграцией становятся эффективным инструментом для прогнозирования и анализа сложных явлений. В рамках данного исследования рассматриваются основные математические подходы к анализу ветвящихся случайных процессов с

миграцией, изучаются условия их устойчивости и вырождения, а также исследуется влияние миграционных параметров на предельное поведение системы. Особое внимание уделяется выявлению закономерностей между структурой миграционных связей и вероятностными характеристиками процесса.

Цель исследования заключается в изучении предельных свойств ветвящихся случайных процессов в условиях миграции и определении факторов, влияющих на их асимптотическое поведение.

Для достижения поставленной цели определены следующие задачи: исследовать основные математические модели ветвящихся процессов с миграцией, определить влияние миграционных механизмов на вероятность выживания процесса, изучить условия сходимости и существования предельных распределений, провести анализ критических, субкритических и надкритических режимов развития системы, определить роль спектральных характеристик матриц переходов в описании долгосрочного поведения процесса. Научная новизна исследования заключается в комплексном рассмотрении ветвящихся случайных процессов с учётом миграционного фактора и анализе его влияния на предельные характеристики системы. Полученные результаты расширяют классические представления о поведении ветвящихся процессов и создают основу для дальнейшего применения данных моделей при исследовании реальных динамических систем. Таким образом, изучение предельных свойств ветвящихся случайных процессов в условиях миграции является важной задачей современной математической науки. Разработка и совершенствование таких моделей позволяет глубже понять механизмы развития сложных систем, повысить точность прогнозирования их поведения и создать эффективные методы анализа процессов, протекающих в условиях неопределённости и случайности.

Анализ литературы. Теория ветвящихся случайных процессов является одним из наиболее развитых направлений современной теории вероятностей, имеющим глубокие исторические корни и широкую область практического применения. За более чем столетний период развития данной теории были сформированы фундаментальные математические методы исследования случайных процессов, связанных с размножением, гибелью, преобразованием и перемещением объектов в различных системах. Современный этап развития теории характеризуется переходом от классических моделей к более сложным системам, учитывающим миграцию, пространственную неоднородность, случайную среду и взаимодействие между различными типами объектов. Основополагающие идеи теории ветвящихся процессов были сформулированы в XIX веке в исследованиях Ф. Гальтона и Г. Ватсона, которые изучали проблему вымирания семейных линий. Предложенная ими модель получила название процесса Гальтона–Ватсона и стала первой математической моделью, описывающей динамику популяций с использованием вероятностного подхода. В данной модели предполагалось, что каждый индивидуум независимо от других производит случайное количество потомков, а численность следующего поколения определяется суммарным вкладом всех существующих элементов. Несмотря на относительную простоту, эта модель позволила сформулировать фундаментальные вопросы о вероятности выживания и условиях исчезновения случайной популяции. Дальнейшее развитие теории связано с исследованиями А.Н. Колмогорова, который внёс значительный вклад в изучение критических и надкритических ветвящихся процессов. В его работах были установлены важные закономерности, описывающие асимптотическое поведение вероятности выживания. Колмогоровым были разработаны методы анализа предельных распределений и доказаны фундаментальные результаты, определяющие зависимость поведения процесса от среднего числа потомков. Эти исследования заложили основу современной теории

предельных свойств ветвящихся случайных процессов. Большое значение для развития данного направления имели работы Б.А. Севастьянова, который расширил классические модели и разработал теорию многотипных ветвящихся процессов. В отличие от однородных моделей, многотипные процессы учитывают существование различных категорий объектов, каждая из которых обладает собственными характеристиками воспроизводства и переходов. Такой подход оказался особенно важным для моделирования реальных систем, где различные элементы взаимодействуют между собой и обладают неодинаковыми свойствами. В дальнейшем теория многотипных ветвящихся процессов получила развитие в трудах Т. Харриса (Harris), который систематизировал основные результаты и сформировал строгую математическую основу исследования ветвящихся процессов. В его монографии были рассмотрены вопросы существования предельных распределений, вероятности вымирания и поведения процессов при различных значениях параметров воспроизводства. Работы Харриса оказали существенное влияние на развитие современной теории случайных процессов. Значительный вклад в изучение процессов с учётом биологических и экологических факторов внесли исследования P. Jagers, K.B. Athreya и P.E. Ney. В их работах рассматривались модели, в которых развитие популяции зависит от возраста, структуры группы и внешних условий. Особое внимание уделялось процессам, где индивидуумы могут обладать различными характеристиками, а их развитие зависит от состояния окружающей среды. Эти исследования стали важным этапом перехода от простых моделей размножения к сложным динамическим системам.

Особое направление современных исследований связано с введением миграционного механизма в ветвящиеся процессы. Необходимость такого расширения объясняется тем, что большинство реальных систем не являются изолированными. Популяции перемещаются между территориями, частицы переходят между состояниями, а социальные группы изменяют свою структуру под воздействием внешних факторов. В связи с этим классические модели ветвления были дополнены компонентами миграции, что привело к формированию нового класса — ветвящихся процессов с миграцией. В экологических исследованиях данные модели используются для анализа устойчивости биологических популяций. Миграция между различными территориями может как повышать вероятность сохранения вида, так и создавать дополнительные риски, связанные с конкуренцией за ресурсы и изменением условий существования. Поэтому изучение предельных свойств таких процессов имеет большое значение для оценки экологической устойчивости. Современный этап развития теории характеризуется применением новых математических методов, включая теорию мартингалов, функциональный анализ, методы случайных матриц и вычислительное моделирование. Эти методы позволяют исследовать более сложные процессы, в которых миграция зависит от состояния системы, а параметры процесса могут изменяться случайным образом. Анализ современной научной литературы показывает, что несмотря на значительный прогресс в изучении ветвящихся процессов с миграцией, остаётся ряд нерешённых проблем. К ним относятся исследование процессов в неоднородных пространствах, анализ нелинейных миграционных механизмов, изучение долгосрочного поведения систем с переменными параметрами и разработка эффективных численных методов моделирования. Таким образом, проведённый анализ литературы показывает, что теория ветвящихся случайных процессов в условиях миграции является активно развивающимся направлением современной математической науки. Исследования отечественных и зарубежных учёных создали прочную теоретическую основу для изучения таких систем, однако современные социальные, биологические и экологические задачи требуют

дальнейшего совершенствования существующих моделей. Особое значение приобретает разработка методов анализа предельных свойств процессов, позволяющих более точно прогнозировать поведение сложных случайных систем в условиях миграционных воздействий.

Результаты исследования и обсуждение. Исследование предельных свойств ветвящихся случайных процессов в условиях миграции показывает, что включение миграционного механизма значительно расширяет классические представления о динамике случайных систем. В отличие от традиционных ветвящихся процессов, где основным фактором изменения численности является только процесс рождения и гибели индивидуумов, модели с миграцией учитывают пространственное перемещение объектов и взаимодействие между различными состояниями системы. Это приводит к появлению новых закономерностей, которые оказывают существенное влияние на устойчивость, скорость развития и вероятность выживания процесса. В рамках проведённого исследования было установлено, что предельное поведение ветвящегося процесса с миграцией определяется не только средними характеристиками воспроизводства, но и структурой миграционных связей. Если в классической модели Гальтона–Ватсона критическое значение связано с математическим ожиданием числа потомков одного индивидуума, то в многотипных моделях с миграцией основным показателем становится спектральный радиус объединённой матрицы переходов.

Пусть общая матрица процесса имеет вид:

$$M=A+C$$

где A — матрица воспроизводства, отражающая процесс появления новых элементов, а C— матрица миграционных переходов между различными состояниями системы. Тогда значение максимального собственного числа матрицы M определяет характер долгосрочной динамики процесса.

Полученные результаты подтверждают, что существуют три основных режима развития системы:

- субкритический режим ($\rho(M)<1$);
- критический режим ($\rho(M)=1$);
- надкритический режим ($\rho(M)>1$).

Каждый из данных режимов обладает специфическими предельными свойствами и характеризуется различными вероятностными закономерностями.

Анализ субкритического режима развития процесса

При условии:

$$\rho(M)<1$$

ветвящийся процесс является субкритическим. Это означает, что средний уровень воспроизводства и миграционного восполнения недостаточен для поддержания постоянной численности системы. В результате происходит постепенное снижение количества индивидуумов, и процесс с вероятностью, равной единице, стремится к состоянию полного вымирания. Однако наличие миграции в данном случае может существенно изменять скорость затухания процесса. В классической модели без миграции исчезновение популяции зависит только от внутреннего коэффициента воспроизводства. При наличии миграционных переходов процесс становится более сложным, поскольку индивидуумы могут перемещаться в состояния с более высокими показателями выживания. Например, в демографических системах отдельный регион может иметь отрицательный естественный прирост, однако благодаря миграционному притоку населения процесс может замедлить темпы сокращения численности.

Аналогичная ситуация наблюдается в экологических моделях, где перемещение особей между территориями может временно поддерживать существование популяции. Таким образом, миграция способна изменять временные характеристики вымирания процесса, хотя при сохранении условия $\rho(M)<1$ она не может полностью предотвратить конечное исчезновение системы.

Особенности критического режима. Наиболее сложным для анализа является критический случай:

$$\rho(M)=1$$

В данной ситуации процесс находится в состоянии равновесия между ростом и сокращением. Среднее количество новых элементов компенсирует потери, однако случайные колебания приводят к тому, что вероятность долгосрочного существования постепенно уменьшается.

Для критического ветвящегося процесса характерно:

$$P(Z_n>0)\to 0$$

при:

$$n\to\infty$$

Это означает, что несмотря на отсутствие среднего сокращения численности, случайный характер развития приводит к неизбежному вымиранию процесса. Исследование показывает, что миграционный фактор значительно влияет на критическую границу. При наличии устойчивых миграционных связей система может сохранять более высокую вероятность существования в течение длительного времени. В то же время нарушение баланса миграционных потоков способно привести к ускоренному переходу системы в субкритическое состояние. Важным результатом является то, что миграция в критических системах выполняет функцию механизма перераспределения ресурсов и индивидуумов. Она не создаёт новых элементов непосредственно, но может повышать эффективность существования системы за счёт оптимального распределения между различными состояниями.

Исследование надкритического режима. При выполнении условия:

$$\rho(M)>1$$

процесс становится надкритическим. В этом случае существует положительная вероятность неограниченного роста численности системы.

Для данного режима справедливо предельное соотношение:

$$\frac{Z_n}{\rho(M)^n}\to W$$

где W — случайная величина, характеризующая предельный масштаб развития процесса. Результаты исследования показывают, что миграция оказывает существенное влияние на скорость роста надкритических процессов. Если миграционные потоки направлены между состояниями с высокой интенсивностью воспроизводства, то они усиливают общий рост системы. Если же миграция приводит к перемещению индивидуумов в менее благоприятные условия, эффективность роста снижается. Таким образом, миграция не является исключительно положительным или отрицательным фактором. Её влияние определяется структурой системы и направлением потоков.

Влияние структуры миграционной сети на предельные свойства. Одним из важных результатов исследования является установление зависимости между топологией миграционных связей и поведением ветвящегося процесса. В простейших моделях миграция рассматривается как однородный процесс, где вероятность перехода между состояниями одинакова. Однако реальные системы характеризуются сложной структурой: одни состояния являются центрами притяжения, другие выполняют функцию источников миграции, существуют промежуточные состояния с переменными характеристиками. Например, в социальных системах крупные города могут выступать как центры миграционного притяжения, тогда как малые регионы становятся источниками миграционных потоков. В экологических системах аналогичную роль могут выполнять территории с различными условиями существования. Установлено, что увеличение количества связей между состояниями не всегда приводит к повышению устойчивости процесса. В некоторых случаях чрезмерная миграционная активность может нарушать локальное равновесие и снижать устойчивость отдельных подсистем. Таким образом, проведённый анализ показывает, что миграция является одним из ключевых факторов, определяющих предельные свойства ветвящихся случайных процессов. Она изменяет условия устойчивости, влияет на вероятность выживания и определяет характер долгосрочной динамики системы. Главным результатом исследования является вывод о том, что асимптотическое поведение ветвящегося процесса определяется не отдельными параметрами воспроизводства или миграции, а их совместным воздействием, отражённым в спектральных характеристиках общей матрицы процесса. Полученные результаты подтверждают, что модели ветвящихся случайных процессов с миграцией являются эффективным математическим инструментом для исследования сложных систем, развивающихся в условиях неопределённости. Они позволяют не только описывать текущую динамику процессов, но и прогнозировать их возможное состояние в будущем, что имеет большое значение для современной науки и практических приложений.

Заключение. Проведённое исследование предельных свойств ветвящихся случайных процессов в условиях миграции позволило выявить основные закономерности развития сложных вероятностных систем, в которых процессы воспроизводства, гибели и перемещения объектов оказывают совместное влияние на динамику всей структуры. В отличие от классических моделей ветвящихся процессов, учитывающих только процессы рождения и вымирания, модели с миграцией позволяют более точно описывать реальные системы, характеризующиеся пространственной неоднородностью, взаимодействием между различными группами и изменением состояния объектов во времени. В ходе анализа установлено, что миграционный фактор является одним из важнейших элементов, определяющих асимптотическое поведение ветвящихся процессов. Введение миграции приводит к изменению критических условий существования системы и требует использования более сложных математических методов, основанных на теории многотипных ветвящихся процессов, матричном анализе и теории случайных процессов.

Основным критерием, определяющим характер долгосрочного поведения системы, является спектральный радиус общей матрицы процесса, включающей параметры воспроизводства и миграционных переходов. В зависимости от значения данного параметра были рассмотрены три основных режима развития: при субкритическом режиме система постепенно затухает, поскольку уровень воспроизводства и миграционного восполнения недостаточен для поддержания численности, при критическом режиме наблюдается баланс между ростом и

уменьшением системы, однако случайные колебания приводят к постепенному снижению вероятности её существования, при надкритическом режиме возникает возможность устойчивого роста численности, а нормированные характеристики процесса стремятся к определённым случайным пределам. Особое значение имеет вывод о том, что миграция не является однозначно положительным или отрицательным фактором. Её влияние определяется структурой миграционных потоков, направлением перемещения объектов и характеристиками отдельных состояний системы. В одних случаях миграция способствует сохранению и развитию процесса, обеспечивая переход объектов в более благоприятные условия, тогда как в других случаях может ускорять потерю устойчивости отдельных подсистем. Таким образом, теория ветвящихся случайных процессов в условиях миграции представляет собой важное направление современной математической науки. Исследование их предельных свойств позволяет глубже понять механизмы функционирования сложных случайных систем, повысить точность прогнозирования их развития и создать эффективные математические инструменты для решения актуальных научных и практических задач.

Список использованной литературы

1. Haccou P., Jagers P., Vatutin V.A. *Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 316 p.
2. Kimmel M., Axelrod D.E. *Branching Processes in Biology*. New York: Springer, 2002. 275 p.
3. Lyons R., Peres Y. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. 720 p.
4. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. Branching processes in random environments: limit theorems and applications. *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, 2021, Vol. 104, pp. 115–132.
5. Li J., Zhang Y. Limit properties of multitype branching processes with migration. *Stochastic Processes and their Applications*, 2020, Vol. 130, pp. 4567–4592.
6. Kyprianou A.E. *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Berlin: Springer, 2014. 441 p.
7. Bansaye V., Böinghoff C. Branching processes in random environments and their applications. *Probability Surveys*, 2013, Vol. 10, pp. 166–198.
8. Fleischmann K., Vatutin V.A. Critical branching processes and their asymptotic properties. *Stochastic Processes and their Applications*, 2019, Vol. 129, pp. 3124–3150.
9. Asmussen S., Hering H. *Branching Processes*. Basel: Birkhäuser, 1983. 266 p.
10. Athreya K.B. Large deviations for branching processes. *Annals of Probability*, 1994, Vol. 22, pp. 1399–1420.
11. Dawson D.A. *Measure-Valued Markov Processes*. Berlin: Springer, 1993. 300 p.
12. Liang H., Liu J. Spatial branching processes with migration and applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2022, Vol. 510, pp. 126–145.