РЕНОРМАЛИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР В ПРОСТРАНСТВЕ КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

Мажитова Хафиза Зокировна
Учитель математики школы № 2
Ташкентского района Ташкентской области.
https://doi.org/10.5281/zenodo.22035353

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются свойства ренормализационного оператора, действующего на пространстве кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности. Исследование базируется на представлении таких отображений как обобщённых преобразований обмена интервалами (g.i.e.m.) рода один. Особое внимание уделяется случаям с особенностями типа «излом» (break points), где производная терпит разрыв. Показано, что при определённых условиях гладкости (включая условие Кацнельсона–Орнштейна) и комбинаторных предположениях ренормализации сходятся к семейству кусочно-мёбиусовых преобразований в норме $C^{(1+L_1)}$. Обсуждается гиперболичность ренормализационного оператора и её роль в доказательстве теорем жёсткости. Статья предназначена для специалистов в области теории динамических систем и эргодической теории.

Ключевые слова: ренормализация, гомеоморфизмы окружности, точка излома, обобщённые преобразования обмена интервалами, жёсткость, гиперболичность.

1. Введение

Теория ренормализации является одним из наиболее мощных и универсальных инструментов современной теории динамических систем. Изначально развитая в физике для анализа критического поведения в статистических системах, она нашла глубокие применения в одномерной динамике, позволяя решать фундаментальные проблемы, связанные с регулярностью сопрягающих отображений.

Для достаточно гладких диффеоморфизмов окружности, как известно из классических результатов Германа и Йоккоза [9, 10], ренормализации сходятся экспоненциально быстро к семейству линейных отображений с наклоном 1. Такая сходимость в сочетании с диофантовыми условиями на число вращения влечёт гладкую линеаризуемость.

Значительно более богатое и нетривиальное поведение ренормализации наблюдается для отображений окружности с особенностями. Основными примерами являются критические отображения окружности и отображения с изломами (break-type singularities), где производная имеет скачкообразные разрывы в конечном числе точек. Для таких систем ренормализации демонстрируют сходимость не к линейным, а к более сложным объектам — семействам дробно-линейных (мёбиусовых) преобразований, что существенно обогащает динамику.

Настоящая работа посвящена систематическому изучению ренормализационного оператора в пространстве кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с несколькими точками излома. Такие отображения естественно рассматривать как обобщённые преобразования обмена интервалами (generalized interval exchange maps, g.i.e.m.) рода один. Мы обсуждаем ключевые свойства сходимости, гиперболичность оператора и приложения к теории жёсткости.

2. Кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломами

Рассмотрим ориентированный сохраняющий гомеоморфизм f: T → T окружности T = R/Z. Отображение f называется кусочно-гладким с изломами, если существует конечное множество точек {x₁, …, x_d} ⊂ T, такое что выполняются следующие условия:

1. f ∈ C^(2+ν)(T \ {x₁, …, x_d}) для некоторого ν > 0;
2. f′(x) > 0 для всех x ≠ xᵢ;
3. В каждой точке излома xᵢ существуют односторонние производные f′(xᵢ−) и f′(xᵢ+), причём

f′(xᵢ−) / f′(xᵢ+) = cᵢ² ≠ 1.

Величины cᵢ характеризуют «размер» излома в точке xᵢ. При cᵢ² = 1 особенность отсутствует.

В случае одной точки излома класс таких отображений изучался в работах Ханина и Вула [7]. Обобщение на случай нескольких точек излома потребовало принципиально новых методов [1, 6].

2.1. Условие гладкости Кацнельсона–Орнштейна

В современных исследованиях рассматривается «нижний» уровень гладкости, называемый условием Кацнельсона–Орнштейна (KO-гладкость). Оно формулируется следующим образом: Df абсолютно непрерывна на каждом интервале непрерывности, и D ln Df ∈ L_p для некоторого p > 1. Это условие является более слабым, чем классическая C^(2+ν)-гладкость, и позволяет охватить более широкий класс динамических систем [8].

Данное условие играет ключевую роль в теории, поскольку, как показано в работе Cunha и Smania [1], при KO-гладкости ренормализации всё ещё сохраняют сходимость к кусочно-мёбиусовым преобразованиям, хотя скорость сходимости может быть медленнее экспоненциальной.

3. Обобщённые преобразования обмена интервалами

Кусочно-гладкий гомеоморфизм окружности может быть представлен как обобщённое преобразование обмена интервалами (g.i.e.m.). Пусть I — открытый ограниченный интервал, A — алфавит из d ≥ 2 символов. Рассмотрим разбиение I на d подинтервалов P = {I_α, α ∈ A}. Тройка (f, A, P) называется обобщённым преобразованием обмена интервалами, если f|_{I_α} является сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом для всех α ∈ A.

Комбинаторные данные задаются биекциями π₀, π₁: A → {1, …, d}, где π₀(α) < π₀(β) тогда и только тогда, когда I_α < I_β, а π₁(α) < π₁(β) тогда и только тогда, когда f(I_α) < f(I_β).

В случае d = 2 стандартные преобразования обмена интервалами соответствуют линейным поворотам окружности, а обобщённые — гомеоморфизмам окружности.

4. Ренормализация Раузи–Вича

Ренормализация Раузи–Вича для g.i.e.m. определяется следующим образом. Пусть α(ε) = π_ε⁻¹(d) для ε ∈ {0,1}. Если интервалы I_{α(0)} и f(I_{α(1)}) имеют различные длины, то f называется ренормализуемым. Если |I_{α(0)}| > |f(I_{α(1)})|, то f ренормализуемо типа 0; в противном случае — типа 1. Символ, соответствующий большему интервалу, называется победителем, а меньшему — проигравшим.

Итерации этой процедуры порождают последовательность ренормализаций Rⁿ(f), связанную с разложением числа вращения в непрерывную дробь:

$\rho(f) = [r_0, r_1, r_2, \ldots]$.

5. Сходимость ренормализаций к кусочно-мёбиусовым отображениям

Центральным результатом теории является сходимость итераций ренормализационного оператора к инвариантному семейству преобразований. Для случая одной точки излома Ханин и Вул [7] показали, что ренормализации сходятся к двумерному семейству дробно-линейных преобразований.

Для нескольких точек излома этот результат был обобщён Куньей и Сманией [1], а также Куньей, Джалиловым и Бегматовым [6], рассмотревшими кусочно-гладкие гомеоморфизмы как обобщённые преобразования обмена интервалами рода один.

Теорема (Cunha, Smania [1]). Пусть f — кусочно-гладкий гомеоморфизм окружности с KO-гладкостью и нулевой средней нелинейностью. Тогда при определённых комбинаторных предположениях (связанных с ограниченностью элементов непрерывной дроби числа вращения) ренормализации $R^n(f)$ сходятся к семейству кусочно-аффинных преобразований обмена интервалами в $C^{(1+L_1)}$-норме.

Более точно, сходимость означает аппроксимацию в C^1-норме и аппроксимацию вторых производных в L_1-норме. В случае $C^{(2+\nu)}$-гладкости сходимость имеет место в более сильной C^2-норме.

Инвариантное семейство мёбиусовых преобразований для случая одной точки излома имеет вид:

$F_{a,v,c}(z) = (a + cz) / (1 - vz), \quad G_{a,v,c}(z) = a(z - c) / (ac + z(1 + v - c))$.

Параметр c определяется через соотношение производных в особой точке:

$c^2 = (F'_{a,v,c}(0) \cdot G'_{a,v,c}(F_{a,v,c}(0))) / (G'_{a,v,c}(0) \cdot F'_{a,v,c}(-1))$.

6. Сходимость ренормализаций двух отображений

Важнейшим свойством, лежащим в основе доказательства теорем жёсткости, является сравнение ренормализаций двух топологически эквивалентных отображений.

Теорема. Пусть f_1 и f_2 — два топологически эквивалентных обобщённых преобразования обмена интервалами рода один с KO-гладкостью. Тогда при определённых комбинаторных предположениях соответствующие ренормализации сходятся друг к другу в $C^{(1+L_1)}$-норме.

Скорость сходимости в случае KO-гладкости медленнее экспоненциальной, что отличает этот случай от $C^{(2+\nu)}$-гладкого случая.

Тем не менее сходимость остаётся достаточной для доказательства гладкости сопряжения.

7. Гиперболичность ренормализационного оператора

Одним из наиболее глубоких результатов является гиперболичность ренормализационного оператора в пространстве отображений с изломами.

Теорема (Khanin, Yampolsky [2]). Ренормализационный оператор для гомеоморфизмов окружности с точкой излома обладает гиперболическим подковообразным аттрактором типа подковы Смейла.

Этот результат означает, что ренормализационный оператор является гиперболическим на своём инвариантном множестве. Гиперболичность подразумевает существование устойчивых и неустойчивых многообразий и, как следствие, наличие сложной (хаотической) динамики в пространстве отображений.

Как отмечается в работе Khanin и Yampolsky [2], из гиперболичности вытекает существование аттрактора типа подковы Смейла, что указывает на универсальность и структурную устойчивость ренормализационной динамики.

8. Инвариантные меры и размерность Хаусдорфа

Гиперболичность ренормализационного оператора имеет важные следствия для структуры инвариантных мер. Как показано в недавней работе Trujillo [11], для достаточно регулярных кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращения и нулевой средней нелинейностью единственная инвариантная мера имеет нулевую размерность Хаусдорфа.

Этот результат тесно связан со свойствами сходимости ренормализаций и указывает на фрактальную природу инвариантных мер для таких систем.

9. Применения: теоремы жёсткости

Сходимость ренормализаций является ключевым ингредиентом в доказательстве теорем жёсткости для гомеоморфизмов окружности с особенностями. Основная идея заключается в следующем: если ренормализации двух топологически эквивалентных отображений сходятся друг к другу, то сопрягающее отображение обладает определённой гладкостью.

Как отмечается в обзорной работе Теплинского и Ханина [4], в случае изломов жёсткость оказывается сильнее, чем в случае гладких диффеоморфизмов. В частности, жёсткость не нарушается для нетипичных чисел вращения, которые аномально быстро аппроксимируются рациональными.

Для случая кусочно-гладких гомеоморфизмов с несколькими точками излома было доказано, что при выполнении условий сходимости ренормализаций сопряжение между двумя такими отображениями является C^1-гладким. Этот результат обобщает ранее известные результаты для случая одной точки излома.

В работе Cunha, Джалилова и Бегматова [6] также обсуждается связь между гиперболичностью ренормализационного оператора и жёсткостью, показывающая, что глобальная гиперболичность является ключевым механизмом, обеспечивающим регулярность сопряжений.

10. Сравнение с гладким случаем

Принципиальное отличие ренормализаций отображений с изломами от гладкого случая заключается в характере предельных объектов. Для гладких диффеоморфизмов предельными объектами являются линейные отображения, тогда как для отображений с изломами — мёбиусовы преобразования. Это различие обусловлено наличием дополнительной информации, связанной с величиной излома c, которая сохраняется при ренормализации.

11. Низкая гладкость

Переход от C^(2+ν)-гладкости к KO-гладкости представляет значительный интерес, поскольку позволяет охватить более широкий класс систем. Однако, как показано в работах Cunha и Smania [1], в случае KO-гладкости скорость сходимости ренормализаций замедляется, что требует более тонких методов доказательства, включая использование теории мартингалов.

12. Открытые вопросы

Несмотря на значительный прогресс в изучении ренормализаций кусочно-гладких отображений, остаётся ряд открытых вопросов:

1. Структура аттрактора. Хотя гиперболичность установлена, детальная структура аттрактора ренормализационного оператора для нескольких точек излома требует дальнейшего изучения.

2. Спектральные свойства. Исследование спектра линеаризации ренормализационного оператора остаётся актуальной задачей.

3. Связь с симплектической структурой. В недавней работе Ханина [3] обсуждается симплектическая структура, ассоциированная с ренормализациями, что открывает новые перспективы для применения методов геометрической теории динамических систем.

13. Заключение

Ренормализационный оператор в пространстве кусочно-гладких отображений окружности демонстрирует богатую и глубокую структуру, существенно отличающуюся от случая гладких диффеоморфизмов. Ключевыми свойствами являются:

1. Сходимость к кусочно-мёбиусовым отображениям при итерациях ренормализации, с аппроксимацией в C^(1+L₁)-норме в случае KO-гладкости;

2. Гиперболичность ренормализационного оператора, проявляющаяся в существовании подковообразного аттрактора типа Смейла;

3. Сходимость ренормализаций топологически эквивалентных отображений, что является основой для доказательства теорем жёсткости;

4. Применение к изучению инвариантных мер, включая результаты о нулевой размерности Хаусдорфа.

Дальнейшие исследования в этой области направлены на распространение полученных результатов на случай произвольного числа точек излома, изучение более тонких свойств ренормализационного оператора и развитие связей с другими разделами математики, включая симплектическую геометрию и теорию мартингалов.

Список литературы

1. Cunha, K., Smania, D. Renormalization for piecewise smooth homeomorphisms on the circle // Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire. 2013. Vol. 30, No. 3. P. 441–462.
2. Khanin, K., Yampolsky, M. Hyperbolicity of renormalization of circle maps with a break-type singularity // Moscow Mathematical Journal. 2015. Vol. 15, No. 1. P. 107–121. arXiv:1312.4184.
3. Khanin, K. Симплектическая структура, ассоциированная с ренормализациями отображений окружности с изломами: доклад на семинаре «Динамические системы и математическая физика».
4. Teplinskii, A. Yu., Khanin, K. M. Rigidity for circle diffeomorphisms with singularities // Russian Mathematical Surveys. 2004. Vol. 59, No. 2. P. 329–353.
5. Каршибоев, Х. К. Отображение окружности с одной точкой излома // Universum: технические науки. 2022. № 5(98).
6. Cunha, K., Dzhalilov, A., Begmatov, A. On the renormalizations of circle homeomorphisms with several break points. arXiv:1706.03654.
7. Khanin, K. M., Vul, E. B. Circle homeomorphisms with weak discontinuities // Advances in Soviet Mathematics. 1991. Vol. 3. P. 57–98.
8. Katznelson, Y., Ornstein, D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 1989. Vol. 9, No. 4. P. 643–680.
9. Herman, M. R. Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1979. Vol. 49. P. 5–233.