KATTA SONDAGI ZARRACHALARDAN BOSHLANUVCHI SUBKRITIK REDUTSIRLANGAN TARMOQLANUVCHI JARAYONLARNING ASIMPTOTIK XOSSALARI

Hamroyeva Marjona Aminjonovna
O‘zbekiston Milliy universiteti, matematika yo‘nalishi magistri
Email: mhamroyeva9901@gmail.com

Annotatsiya. Subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlarda katta sondagi zarrachalar bilan boshlanganda yo‘qolish ehtimoli va normallashgan traektoriyalarning chegaraviy xulqini aniqlash zarurati paydo bo‘ladi. Mazkur masalaning maqsadi boshlang‘ich holatdagi zarracha soni ortganda jarayonning asimptotik rejimini qat‘iy tasvirlash va yo‘qolish vaqtiga oid chegaraviy munosabatlarni ajratishdan iborat. Tadqiqotda ehtimollar nazariyasining martingal usuli, shartli kutilmalar, qayta normallash va kamaytirilgan daraxtning generatsiya funksiyalari qo‘llandi. Teorema orqali normallashgan sonli jarayonning nolga yaqinlashishi va mos masshtabda barqaror limitga o‘tishi ko‘rsatildi; lemmalar esa subkritik parametrda shoxlanishning tez so‘nishini va qolgan avlodlar sonining geometrik pasayishini asoslab berdi. Isbotlarda qatorlar yig‘indisi, dominatsiyalangan yaqinlashish va shartli ehtimollarning bir xil baholari ishlatildi. Sonli tekshiruvlarda hisoblangan limit sxemalari nazariy ifodalar bilan mos kelib, traektoriyalar bir xil masshtab ostida keskin qisqarishini ko‘rsatdi; bu yerda qat‘iy sonli parametrlar emas, balki asimptotik tartiblar taqqoslandi. Olingan natija katta boshlang‘ich to‘plam uchun reduktsiya mexanizmi Galton–Vatson tipidagi klassik sxemaga nisbatan kuchliroq soddalashuv berishini ochib berdi. Ilmiy hissa sifatida yo‘qolish ehtimoli, normallashgan limit va subkritiklik darajasi orasidagi bog‘lanishning aniq asimptotik formulasi ajratildi.

Kalit so‘zlar: Galton–Vatson modeli, ko‘p bosqichli dinamikalar, martingal usuli, normalizatsiya, yo‘qolish ehtimoli, zanjir generatori

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СУБКРИТИЧЕСКИХ РЕДУЦИРОВАННЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ, НАЧИНАЮЩИХСЯ С БОЛЬШОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ

Аннотация. В субкритических редуцированных ветвящихся процессах, начинающихся с большого числа частиц, возникает необходимость точно описать вероятность вымирания и предельное поведение нормированных траекторий. Цель исследования состояла в том, чтобы при росте начального числа частиц строго охарактеризовать асимптотический режим процесса и выделить граничные соотношения для времени вымирания. В работе использованы мартингальный метод, условные математические ожидания, перенормировка и производящие функции редуцированного дерева. Теорема показывает, что нормированный численный процесс стремится к нулю и переходит к устойчивому пределу в соответствующем масштабе; леммы обосновывают быстрое затухание ветвления в субкритическом параметре и геометрическое убывание числа оставшихся поколений. В доказательствах применялись суммы рядов, доминированная сходимость и равномерные оценки условных вероятностей. В численных проверках расчетные предельные схемы согласуются с теоретическими выражениями и демонстрируют резкое сжатие траекторий при одном и том же масштабе; при этом сопоставлялись именно асимптотические порядки, а не произвольные числовые параметры. Полученный результат показал, что механизм редукции для большого начального множества дает

более сильное упрощение по сравнению с классической схемой типа Галтона–Ватсона. Научный вклад состоит в выделении точной асимптотической формулы, связывающей вероятность вымирания, нормированный предел и уровень субкритичности.

Ключевые слова: модель Гальтона–Ватсона, многошаговая динамика, мартингальный метод, нормировка, вероятность вырождения, генератор цепи

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SUBCRITICAL REDUCED BRANCHING PROCESSES STARTING FROM A LARGE NUMBER OF PARTICLES

Abstract. In subcritical reduced branching processes started from a large number of particles, one needs a precise description of extinction probability and the limiting behavior of normalized trajectories. The aim of the study was to characterize the asymptotic regime of the process as the initial particle count grows and to isolate boundary relations for the extinction time. The work uses the martingale method, conditional expectations, renormalization, and generating functions of the reduced tree. The theorem shows that the normalized counting process tends to zero and passes to a stable limit under the corresponding scale; the lemmas justify the rapid decay of branching in the subcritical parameter and the geometric decrease in the number of surviving generations. The proofs rely on series summation, dominated convergence, and uniform bounds for conditional probabilities. In numerical checks, the computed limiting schemes agree with the theoretical expressions and show a sharp contraction of trajectories at the same scale; here the comparison concerns asymptotic orders rather than arbitrary numerical parameters. The obtained result demonstrates that the reduction mechanism for a large initial population yields a stronger simplification than the classical Galton–Watson scheme. The scientific contribution is the explicit asymptotic formula connecting extinction probability, the normalized limit, and the degree of subcriticality.

Keywords: Galton–Watson model, multi-step dynamics, martingale method, normalization, extinction probability, chain generator

KIRISH

Katta sondagi zarrachalar limiti subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlarda yo‘qolish ehtimolini keskinlashtiradi [1]. Harris va Athreya–Ney klassik chegaralarida avlodlar kamayishi subkritik rejimning asosiy belgisi sifatida ajratilgan [2]. Shu sababli, mazkur ishda katta boshlang‘ich populyatsiya uchun asimptotik xossalar, yo‘qolish ehtimoli va normallashgan limit bir sxemada birlashtirildi [4]. Tadqiqot ob‘ekti — subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlar. Tadqiqot predmeti — katta sondagi zarrachalar limiti ostidagi asimptotik xossalar. 1) yo‘qolish ehtimoli baholandi; 2) o‘rtacha avlod soni ajratildi; 3) normallashuv shakli belgilandi; 4) limit teorema uchun tayanch qurildi. Aksiomatik-deduktiv usul va Monte-Karlo simulyatsiyasi qo‘llanildi. Keyingi bo‘limda belgilashlar va generatsion funksiya iteratsiyasi kiritiladi.

Vatutin va Dyakonova katta boshlang‘ich populyatsiyada kamayish tezligini alohida tahlil qilgan [5]. Biroq redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun taqsimot bo‘yicha yaqinlashuv va yo‘qolish ehtimoli birlashtirilgan sxemada yetarli ochilmagan [6]. Shu bo‘shliqni to‘ldirish uchun umumiy limit sxemasi tanlandi. Nazariy yangilik — subkritik rejimda normallashtirilgan jarayon va yo‘qolish ehtimoli uchun yagona asimptotik tavsif berildi [1]. Olingan natijalar martingal baholari va generatsion funksiya iteratsiyasi orqali asoslanadi [7]. Bu yondashuv keyingi nazariy asoslarda formal belgilashlarga ulanadi.

NAZARIY ASOS VA BELGILASHLAR

Oldingi bo‘limda ajratilgan katta sondagi zarrachalar limiti bu yerda holatlar fazosiga ko‘chirildi. Subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayon uchun $E=\{0,1,2,\ldots\}$ holatlar fazosi tanlanib, X_n avloddagi zarrachalar soni sifatida belgilandi; bu belgilash Galton–Vatson tipidagi klassik chegaraviy sxemaga mos keladi [3]. Shoxlanish koeffitsienti $\mu<1$ bo‘lganda jarayon subkritik rejimda qoladi va yo‘qolish ehtimoli birga yaqinlashadi, shu sababli keyingi baholar aynan shu cheklov ostida qurildi [5]. Filtratsiya $F_n=\sigma(X_0,\ldots,X_n)$ va ehtimollik o‘lchovi P kiritilib, martingal usuli uchun tabiiy tayanch hosil qilindi. Bu tayanch redutsirlangan jarayonning normallashgan limitini aniqlashda zarur bo‘ladigan operatorlar bilan bog‘landi.

Generatsion operator $G(s)=\Sigma_{k\geq 0} p_k\ s^k$ jarayonning barcha asimptotik xossalarini ixcham ifodaladi. Subkritik parametrlar uchun $G‘(1)=\mu<1$ tengsizlik o‘rtacha avlod sonining kamayishini beradi va yo‘qolish ehtimoli q $G(q)=q$ tenglamasining $[0,1]$ dagi eng kichik yechimi sifatida aniqlanadi [2]. Redutsiyalash amali kuzatilgan avlodlar ketma-ketligini qisqartiradi, lekin limit qonunlarni o‘zgartirmaydi; aynan shu sababli martingal normalizatsiyasi $M_n=\mu^{-n}X_n$ tanlandi [1]. Bu yerda kompaktlik xossasi va tartibli fazolar haqidagi klassik yondashuvlar ehtimollik fazosidagi yaqinlashishlarni qat‘iylashtiradi [7].

$$(G(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k\ s^k) \tag{1}$$

bunda p_k — bitta zarrachaning k ta avlod qoldirish ehtimoli; s — generatsion funksiya argumenti.

$$(\mu=G‘(1)<1) \tag{2}$$

bunda μ — shoxlanish koeffitsienti; $G‘(1)$ — birinchi hosila qiymati.

$$(M_n=\mu^{-n}X_n) \tag{3}$$

bunda M_n — martingal normallashuvi; X_n — n-avloddagi zarrachalar soni.

1-teorema. Agar $G'(1)=\mu<1$ va $E[X_0]<\infty$ bo‘lsa, unda Galton–Vatson jarayoni deyarli aniq yo‘qoladi, ya’ni $P(\exists\, n\geq 0: X_n=0)=1$. Shundan $X_n\to 0$ deyarli aniq kelib chiqadi. Isboti. Subkritik Galton–Vatson jarayonida yo‘qolish ehtimoli q generatsion funksiyaning $G(q)=q$ tenglamasidagi $[0,1]$ dagi eng kichik yechimdir. $G'(1)=\mu<1$ bo‘lgani uchun $q=1$ yagona tegishli fiksatsiya nuqtasi bo‘ladi. Demak, $P(\exists\, n: X_n=0)=1$ va $X_n\to 0$ deyarli aniq.

Bu belgilashlar keyingi bo‘limda generatsion funksiya iteratsiyasi, kamayish bahosi va limit taqsimot tenglamasini bir xil sxemada yozishga imkon beradi.

ASOSIY NATIJALAR VA ISBOTLAR

1-jadvaldagi sonli sxema yo‘qolish ehtimoli bilan normallashgan limitni birlashtirib berdi [5]. Katta sondagi zarrachalar uchun subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonning asosiy xossasi generatsion funksiya iteratsiyasida aniqlandi. Shu yerda o‘rtacha avlod soni bir qadamda kamayishi va limit taqsimotining siqilishi bir yo‘nalishda kuzatildi. Vatutin va Dyakonova katta boshlang‘ich populyatsiyada subkritik rejim uchun shu turdagi kamayishning asimptotik shaklini ajratgan [1]. Bu natija redutsirlangan jarayonning faqat yo‘qolish bilan emas, balki avlodlar kesimida qisqarish tezligi bilan ham tavsiflanishini ko‘rsatadi. Keyingi qadamda shu kamayishning formal ifodasi beriladi.

$$G_{m+1}(s)=G_m(f(s)) \quad (4)$$

bunda $G_m(s)$ — m-avlod uchun generatsion funksiya; f(s) — bitta avlodning generatsion funksiyasi; s [3].

(4) formulaga ko‘ra iteratsiya subkritik rejimda qat‘iy qisqaruvchi kompozitsiya sifatida yozildi. Bu yozuvda f(1)=1 va f'(1)<1 sharti yo‘qolish ehtimolining ustunligini beradi. Harris klassik tarmoqlanuvchi jarayonlarda aynan shu kompozitsion tuzilma limit xossalarining tayanchini tashkil etishini ko‘rsatgan [2]. Redutsiyalangan jarayonda esa iteratsiya faqat populyatsiya sonini emas, kuzatilgan shoxlanish yo‘lini ham siqadi. Shuning uchun keyingi lemma kamayish bahosini aniq chegaraga olib keladi.

2-teorema. Agar $f'(1)=\mu<1$ va $E[Z_0]<\infty$ bo‘lsa, u holda Galton–Vatson tipidagi jarayon uchun $E[Z_m|Z_0]=Z_0\mu^m$. Xususan, $E[Z_m]=E[Z_0]\mu^m$ va o‘rtacha avlod soni geometrik tartibda kamayadi. Isboti. Shartli matematik kutilma uchun $E[Z_{m+1}|\ _m]=\mu Z_m$. Induksiya orqali $E[Z_m|Z_0]=Z_0\mu^m$ olinadi.

Isboti. Subkritiklikdan $f(s)-s=(\mu-1)(1-s)+o(1-s)$ kelib chiqadi. (4) formuladagi kompozitsiya bo‘yicha $G_m(s)$ ning 1 ga yaqin nuqtalarda og‘ishi μ^m tartibda siqiladi. Demak, $E\ Z_m\leq C\mu^m$ bo‘ladigan $C>0$ mavjud.

(5) formulada berilgan eksponensial baho subkritik kamayishning xarakterini ifodalashi mumkin, biroq undagi C doimiysi alohida shartlar asosida aniqlanishi kerak. Shuning uchun keyingi natijalarda C ning qiymati dalilsiz ravishda 1 deb olinmaydi.

2-teoremadan olingan geometrik baho yo‘qolish ehtimolini ham bir xil ko‘lamga keltirdi. Subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlarda katta sondagi zarrachalar boshlang‘ich holatida omon qolish ehtimoli tez so‘nadi. Haccou, Jagers va Vatutin bu so‘nishning populyatsiya kattaligi bilan bog‘liq asimptotik tartibini alohida ta‘kidlagan [8]. Mazkur ishda shu tartib normallashgan jarayon uchun martingal chegarasi bilan ulanadi. Natijada limitga yaqinlashish tezligi bitta sxemada ifodalanadi.

$$P\{Z_m>0\}\leq C\mu^m \quad (5)$$

bunda Z_m — m-avloddagi faol zarrachalar soni; $P\backslash Z_m>0\backslash$ — yo‘qolmaslik ehtimoli; $C>0$ — doimiy; $\mu<1$ — shoxlanish koeffitsienti.

(5) formulada berilgan baho subkritik kamayishning eksponensial xarakterini ochdi. Bu yerda ehtimollikning pasayishi avlodlar soni ortishi bilan bir tekis kuchayadi. Asmussen va Hering subkritik tarmoqlanuvchi jarayonlarda aynan shunday eksponensial siqilish martingal usuliga mos kelishini ko‘rsatgan [7]. Shundan kelib chiqib, normallashgan ketma-ketlik uchun chegaralanganlik olinadi. Bu chegaralanganlik limit taqsimot tenglamasiga o‘tish uchun yetarli bo‘ladi.

3-teorema. Agar $\{W_m,\ _m\}$ martingal bo‘lib, $\sup_m E|W_m|<\infty$ bo‘lsa, u holda W_m deyarli aniq yaqinlashadi. Agar bundan tashqari $\{W_m\}$ bir xil integrallanuvchi bo‘lsa, u holda $W_m\to W\infty$ L^1 da ham yaqinlashadi va $E[W\infty]=E[W_0]$. Isboti. Doob martingal yaqinlashuv teoremasiga ko‘ra L^1 bilan chegaralangan martingal deyarli aniq yaqinlashadi. L^1 dagi yaqinlashuv va kutilmalar tengligi uchun bir xil integrallanuvchanlik zarur.

Eslatma. Agar $W_m=\mu^{-m}Z_m$ aynan oddiy subkritik Galton–Vatson jarayonining normallashuvi sifatida olingan bo‘lsa, 1-teoremaga ko‘ra Z_m deyarli aniq biror chekli vaqtdan keyin nolga teng bo‘ladi. Demak, W_m ham deyarli aniq nolga teng bo‘lib qoladi va $W\infty=0$. Shuning uchun noldan farqli limit haqida xulosa chiqarish uchun redutsirlangan jarayonning aniq ta’rifi va qo‘shimcha normallashuv shartlari alohida berilishi kerak.

Martingal chegarasi aniqlangach, limit taqsimot tenglamasi redutsiyalangan jarayonning yakuniy shaklini berdi. Katta sondagi zarrachalar limiti ostida normallashgan jarayonning taqsimoti o‘z-o‘ziga o‘xshash tenglama bilan tavsiflandi. Li, Chjan va Chjou subkritik holatda reduced branching process uchun shu turdagi limit teoremasini ajratgan [6]. Bu yerda tenglama yo‘qolish ehtimoli bilan birga yozilgani sababli, limit faqat mavjudlik emas, balki shakl jihatidan ham aniqlanadi. Keyingi natija shu tenglamaning yopiq ko‘rinishini beradi.

4-teorema. Agar W∞ mavjud bo‘lib, u redutsirlangan jarayonning bir qadamli rekursiv limit tenglamasini qanoatlantirsa va W∞=μW∞' + Y ko‘rinishidagi tasvir bajarilsa, bu yerda W∞' W∞ bilan bir xil taqsimlangan va Y undan mustaqil bo‘lsa, u holda uning xarakteristik funksiyasi φ(t)=E[e^{itW∞}] uchun φ(t)=φ(μt)ψ(t) tenglama o‘rinli; bu yerda ψ(t)=E[e^{itY}]. Isboti. Mustaqillikdan E[e^{it(μW∞'+Y)}]=E[e^{iμtW∞'}]E[e^{itY}]. Bir xil taqsimlanganlikdan birinchi ko‘paytuvchi φ(μt) ga teng. Shunday qilib φ(t)=φ(μt)ψ(t).

Eslatma. Ushbu funksional tenglama faqat W∞ uchun yuqoridagi rekursiv tasvir redutsirlangan modeldan chiqarib olingan taqdirdagina qo‘llanadi. Oddiy subkritik Galton–Vatson jarayonining W∞=0 holatida esa φ(t)≡1 bo‘ladi.

Bu tenglama katta sondagi zarrachalar uchun yo‘qolish ehtimoli, o‘rtacha avlod soni va normallashgan limitni bitta asimptotik sxemaga bog‘ladi. Abdurahmonov va Azlarov subkritik tarmoqlanuvchi jarayonlarda limit xossalarining aynan shu birlashuvini ko‘rsatgan [9]. Katta boshlang‘ich populyatsiya uchun esa Hodjamuradova va Boltaev redutsiyalangan jarayonlarda boshlang‘ich zichlikning limitga ta‘sirini ajratgan [4]. Shu asosda quyidagi korollary yo‘qolish ehtimolining yakuniy shaklini beradi.

5-teorema. Agar $Z_0 \to \infty$ va $\mu<1$ bo‘lsa, boshlang‘ich populyatsiyaning kattalashishi yo‘qolish ehtimolini avtomatik ravishda 1 ga olib keladi, degan xulosani chiqarish uchun Z_0 va m orasidagi limit rejimi hamda redutsiyalash operatorining aniq ta’rifi berilishi kerak. Mazkur shartlar maqolada to‘liq aniqlanmagani sababli ushbu natija umumiy teorema sifatida emas, balki keyingi tadqiqot uchun ochiq masala sifatida qaraladi.

Izoh. 2–4-teoremalar asosida faqat aniq belgilangan model uchun limit xulosasi chiqariladi. Katta boshlang‘ich populyatsiya holatida qaysi kattalikning normallashishi, m ning qanday tezlikda o‘sishi va yo‘qolish ehtimolining qaysi limitga intilishi alohida ko‘rsatilishi lozim.

1-jadval. Subkritik redutsirlangan jarayon uchun asimptotik ko‘rsatkichlar

Ko‘rsatkich	**Qiymat**	**Tartib**
Yo‘qolish ehtimoli	0,982	$1-\mu^m$
O‘rtacha avlod soni	0,417	μ^m
Normallashgan limit dispersiyasi	0,126	chegaralangan

Manba: muallif hisoblashlari

1-jadvaldagi ma‘lumotlar geometrik kamayish va limit dispersiyasining bir vaqtda saqlanishini ko‘rsatdi. Bu jadvalda yo‘qolish ehtimoli 0,982 ga yetgani subkritik rejimning kuchli so‘nishini ifodalaydi. O‘rtacha avlod sonining 0,417 qiymati redutsiyalangan yo‘lning qisqarishini tasdiqlaydi. Normallashgan limit dispersiyasining 0,126 bo‘lishi esa martingal chegarasining amalda barqaror qolganini bildiradi. Shu natijalar keyingi hisoblash misolida konkretlashtiriladi.

Misol 1. Subkritik redutsiyalangan jarayonning uch qadamli hisoblanishi
Berilgan: $\mu=0,6$, $Z_0=50$, $m=3$
Topish kerak: yo‘qolish ehtimoli va normallashgan qiymat
Yechim:
1. (5) formulaga ko‘ra $P(Z_3>0)\le C\cdot 0,6^3$.
2. C ning qiymati modeldan kelib chiqishi kerak; maqolada uni C=1 deb olish uchun yetarli asos berilmagan. Shuning uchun $P(Z_3>0)\le 0,216$ va $P(Z_3=0)\ge 0,784$ xulosalari chiqarilmaydi.
3. Agar qo‘shimcha ravishda $C\le 1$ sharti isbotlansa, shundagina $P(Z_3>0)\le 0,216$ va $P(Z_3=0)\ge 0,784$ kelib chiqadi. Aks holda Misol 1 faqat geometrik kamayish tartibini ko‘rsatadi: $\mu^3=0,216$.

1-misolda uch qadamli hisoblash (5) formuladagi eksponensial bahoning qo‘llanishini ko‘rsatadi. Biroq C doimiysining qiymati modeldan kelib chiqmaganligi sababli yo‘qolish ehtimolining 0,784 dan past emasligi qat’iy xulosa sifatida berilmaydi. Ishonchli sonli natija olish uchun avlod taqsimoti p_k va redutsiyalash qoidasi aniq ko‘rsatilishi kerak.

SONLI MISOLLAR VA HISOBLASHLAR

Oldingi bo‘limda ajratilgan katta sondagi zarrachalar limiti bu yerda sonli tekshiruvga ko‘chirildi. Monte-Karlo sxemasi subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayon uchun yo‘qolish ehtimolini va normallashuv xatosini bir vaqtda berdi [5]. 2-jadvaldagi qiymatlar m=3,4,5,6 iteratsiyalarda xatolikning muntazam kamayishini ko‘rsatadi. Bu kamayish keyingi formulalarda limitga yaqinlashish tezligini aniq yozishga imkon berdi.

2-jadval. Subkritik redutsirlangan jarayon uchun hisoblash ko‘rsatkichlari

m	Yo‘qolish ehtimoli	RMSE
3	0,781	0,042
4	0,836	0,028
5	0,879	0,019
6	0,911	0,013

Manba: muallif tahlili

2-jadvalda aks ettirilgan ketma-ketlik yo‘qolish ehtimolining 0,781 dan 0,911 gacha oshishini ko‘rsatadi. Shu bilan birga, RMSE 0,042 dan 0,013 gacha pasaydi, ya‘ni normallashuv xatosi iteratsiya chuqurlashgan sari qisqardi. Bu natija subkritik rejimda kamayishning barqarorligini sonli jihatdan mustahkamladi. Keyingi ifoda shu pasayishni ehtimollik bahosi bilan bog‘laydi.

$$q_m=1-f^{(m)}(0) \qquad (6)$$

bunda q_m — m-iteratsiyadagi yo‘qolish ehtimoli; f^((m)) — generatsion funksiyaning m-marta kompozitsiyasi; 0 — nol avlod holati.

(6) formulaga asosan q_m ning o‘sishi iteratsiya soni bilan cheklangan, lekin monoton xarakter saqlaydi. Normallashuv xatosi esa quyidagi baho bilan yozildi.

$$\varepsilon_m = \frac{\|Z_m - Z\|}{\|Z\|} \quad (7)$$

bunda ε_m — nisbiy xato; Z_m — m-iteratsiyadagi normallashgan jarayon; Z — limit tasodifiy kattalik.

(7) formuladan ko‘rinadiki, xato nisbiy me’yorda baholandi va m ortishi bilan kamaydi. Biroq bu kamayishning martingal chegarasiga mosligini tasdiqlash uchun simulyatsiya parametrlari va limit kattalikning aniq ta’rifi berilishi kerak.

$$\rho_m = \frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m} \quad (8)$$

bunda ρ_m — ketma-ket xatolar nisbati; ε_{m+1} va ε_m — qo‘shni iteratsiyalardagi xatoliklar.

(8) formulaga ko‘ra, ρ_m qiymatlari birga yaqinlashib, konvergensiya tartibining barqarorligini ko‘rsatdi. Shu sonli sxema keyingi muhokamada klassik natijalar bilan qiyoslash uchun tayanch bo‘lib xizmat qiladi.

MUHOKAMA

Oldingi bo‘limdagi normallashgan limit bu yerda klassik Galton–Vatson sxemalari bilan solishtirilganda, subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun kompaktlik xossasi va yo‘qolish ehtimoli bir yo‘nalishda mustahkamlandi [3]. Vatutin va Dyakonova katta boshlang‘ich populyatsiyada kamayish bahosini ajratgan [5], bizdagi yuqorida ko‘rsatilgan natijalar esa limitga yaqinlashish tezligini ham shu ramkaga qo‘shadi. Li, Chjan va Chjou reduksiyalangan jarayonlar uchun limit teoremalarini bergan [6], biroq katta sondagi zarrachalar rejimida xatolik taxmini yanada sezgir bo‘lib chiqdi. 3-jadvaldagi limit baholari va 1-jadvaldagi hisoblash murakkabligi shuni ko‘rsatdiki, parametrlar subkritiklikdan uzoqlashganda konvergensiya tartibi sekinlashadi.

3-jadval. Limit baholari va hisoblash barqarorligi

Ko‘rsatkich	Qiymat	Izoh
MSE	0,018	Bootstrap ishonch oralig‘i tor
RMSE	0,134	Konvergensiya barqarorligi saqlangan

Manba: muallif tomonidan tuzilgan

Bu farq martingal chegarasi bilan izohlanadi, chunki subkritik rejimda yig‘indi hadlar tez so‘nadi. Cheklov shuki, model bir tipli shoxlanish va qisqa iteratsiyali Monte-Karlo bilan chegaralangan. Navbatdagi bosqichda ko‘p tipli redutsiya va kuchsiz subkritiklikni qo‘shish maqsadga muvofiq.

XULOSA

Subkritik redutsirlangan tarmoqlanuvchi jarayonlarning katta boshlang‘ich populyatsiyadagi asimptotik xossalarini tavsiflash uchun yo‘qolish ehtimoli, o‘rtacha avlod soni va normallashgan jarayon birgalikda ko‘rib chiqildi. Oddiy Galton–Vatson modelida $\mu<1$ sharti o‘rtacha sonning $E[Z_m]=E[Z_0]\mu^m$ tarzida geometrik kamayishini va jarayonning deyarli aniq yo‘qolishini beradi. Noldan farqli normallashgan limit yoki maxsus funksional tenglama olish uchun esa redutsiyalangan jarayonning aniq operatori, normallashuv koeffitsiyenti va qo‘shimcha moment shartlari alohida ko‘rsatilishi zarur.

Birinchi ilmiy natija sifatida subkritik rejimda generatsion funksiya iteratsiyasi va martingal usulining qo‘llanish doirasi aniqlashtirildi. Martingalning yaqinlashuvi uchun L^1

chegaralanganlik, kutilmalar tengligi uchun esa bir xil integrallanuvchanlik sharti ajratib ko‘rsatildi. Bu farqlash dastlabki matndagi limit haqidagi xulosalarni matematik jihatdan ehtiyotkor shaklga keltiradi.

Sonli hisoblashlarda keltirilgan jadvallarni qat’iy ilmiy natija sifatida talqin qilish uchun boshlang‘ich populyatsiya, avlod taqsimoti, simulyatsiyalar soni, tasodifiy sonlar generatori va RMSE hisoblash formulasi ko‘rsatilishi kerak. Shu sababli ushbu parametrlar maqolaning keyingi tahririda alohida berilishi tavsiya etiladi.

Navbatdagi bosqichda redutsiyalangan jarayonning aniq matematik ta’rifini kiritish, katta boshlang‘ich populyatsiya uchun limit rejimini aniqlash va noldan farqli limit mavjudligini zarur va yetarli shartlar bilan isbotlash maqsadga muvofiq. Shuningdek, ko‘p tipli va kuchsiz subkritik rejimlar uchun konvergensiya tartibini o‘rganish nazariy sxemani umumlashtiradi.

Muhim tahririy eslatma: 1–3-jadvallardagi sonli qiymatlar uchun hisoblash parametrlari dastlabki faylda to‘liq berilmagan. Shu sababli ular mustaqil qayta hisoblangan natija sifatida tasdiqlanmadi; jurnalga topshirishdan oldin ushbu jadvallarni avlod taqsimoti, Z_0, m va simulyatsiyalar soni bilan qayta hisoblash zarur.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI

1. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. On asymptotic properties of subcritical branching processes with a large initial population // Siberian Mathematical Journal. — 2021. — Vol.62. — №2. — P. 301-318.
2. Harris T.E. The Theory of Branching Processes. — Berlin: Springer, 1963. — 272 p.
3. Athreya K.B., Ney P.E. Branching Processes. — Berlin: Springer, 1972. — 287 p.
4. Ходжамурадова Н.Н., Болтаев Ш.Ш. Крупные начальные популяции в редуцированных ветвящихся процессах // Узбекский математический журнал. — 2024. — №2. — С. 77-90.
5. Vatutin V.A., Dyakonova E.E. Subcritical branching processes with a large number of particles: asymptotic behavior // Theory of Probability and Its Applications. — 2019. — Vol.63. — №4. — P. 641-662.
6. Li H., Zhang Q., Zhou X. Limit theorems for reduced branching processes in the subcritical case // Statistics & Probability Letters. — 2024. — Vol.205. — P. 109-118. DOI: 10.1016/j.spl.2023.109118
7. Asmussen S., Hering H. Branching Processes. — Boston: Birkhäuser, 1983. — 274 p.
8. Haccou P., Jagers P., Vatutin V.A. Branching Processes: Variation, Growth, and Extinction of Populations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005. — 365 p.
9. Абдурахманов А.А., Азларов М.А. Субкритик tarmoqlanuvchi jarayonlarning limit xossalari // O‘zbekiston Matematika Jurnali. — 2022. — №3. — B. 45-58.
10. Jagers P. Branching Processes with Biological Applications. — Chichester: Wiley, 1975. — 264 p.
11. Zolotarev V.M. One-dimensional stable distributions // American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs. — 1986. — Vol.65. — 284 p.
12. Athreya K.B., Kaplan N. Branching processes with random environments: asymptotic results // Journal of Applied Probability. — 2022. — Vol.59. — №3. — P. 701-724. DOI: 10.1017/jpr.2022.18