A-ANALITIK STRUKTURA ASOSIDA DIFFERENSIAL JARAYONNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH VA SONLI YECHISH ALGORITMI

Sadullayeva Gulasal Ulug'bek qizi
E-mail: gulasalsadullayeva2101@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.22686754

Annotatsiya. Ushbu maqolada A-analitik strukturalar asosida differensial jarayonni matematik modellashtirish, hosil bo'lgan masalani sonli yechish hamda hisoblash algoritmini ishlab chiqish masalasi qaraladi. Tadqiqotning nazariy asosi A-analitik funksiyalar nazariyasiga va A-analitik funksiyalar yordamida differensial tenglamalar sistemalarini tadqiq qilishga bag'ishlangan ishlarga borib taqaladi. Xususan, A-analitik funksiyalarni differensial tenglamalar sistemasining Koshi masalalariga qo'llash yondashuvi asos g'olishi qilinadi. Mazkur ishda ushbu apparat boshqa tipdagi differensial jarayon — chegaralangan sohada issiqlik tarqalishining statsionar modeli uchun qo'llanadi. Model A-analitik struktura orqali kompleks ko'rinishda ifodalanib, uning real va mavhum qismlari uchun differensial sistema hosil qilinadi. Keyinchalik chekli-ayirmali approksimatsiya asosida sonli sxema va hisoblash algoritmi taklif etiladi. Aniq yechimga ega test-masala yordamida sonli usulning aniqligi tekshiriladi. Olingan natijalar A-analitik struktura asosidagi modellarni sonli tadqiq qilish imkoniyatini ko'rsatadi.

Kalit so'zlar: A-analitik funksiya, A-analitik struktura, differensial tenglama, matematik modellashtirish, issiqlik tarqalishi, sonli usul, chekli-ayirmali sxema, hisoblash algoritmi, sonli xatolik.

1. KIRISH

Differensial tenglamalar tabiiy va texnik jarayonlarni matematik modellashtirishning asosiy vositalaridan biridir. Issiqlik tarqalishi, elastiklik, suyuqliklar harakati, diffuziya, geofizik jarayonlar va boshqa ko'plab masalalar xususiy hosilali differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi.

Kompleks analizning umumlashmalari orasida A-analitik funksiyalar nazariyasi alohida o'rin egallaydi. A-analitik funksiyalar uchun differensial munosabatlar yordamida ayrim elliptik sistemalarni kompleks ko'rinishda ifodalash va ularning chegaraviy hamda Koshi masalalarini tadqiq qilish mumkin.

K.H. Imomnazarov va N.M. Jabborov tomonidan A-analitik funksiyalar statsionar poroelastiklik sistemasi uchun Koshi masalasini tadqiq qilishda qo'llangan. Ushbu ishda elastik g'ovak muhitning siljish vektori va g'ovak bosimi bilan bog'liq ikkinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi qaralgan hamda tegishli Koshi masalasi uchun Karleman formulasi qurilgan [1].

Mazkur tadqiqotda shu nazariy yondashuvdan foydalanib, boshqa differensial jarayon uchun matematik model qurish maqsad qilinadi. Asosiy e'tibor faqat nazariy natijaga emas, balki modelni sonli yechish va hisoblash algoritmini ishlab chiqishga qaratiladi.

Tadqiqotning maqsadi — A-analitik struktura asosida differensial jarayonning matematik modelini ishlab chiqish, hosil bo'lgan masala uchun chekli-ayirmali sonli sxema qurish va uning asosida hisoblash algoritmini taklif etish.

Tadqiqotning asosiy vazifalari quyidagilardan iborat:

- A-analitik strukturaning matematik modelini aniqlash;
- differensial jarayon uchun chegaraviy masalani qo'yish;
- kompleks tenglamani real differensial tenglamalar sistemasiga ajratish;
- sonli approksimatsiya sxemasini qurish;

- hisoblash algoritmini ishlab chiqish;
- aniq yechim yordamida sonli algoritmning xatoligini baholash.

2. A-ANALITIK STRUKTURANING MATEMATIK ASOSLARI

Kompleks o‘zgaruvchini $z = x + iy$ ko‘rinishda qaraymiz.

Kompleks hosilalar quyidagicha aniqlanadi:

$\partial / \partial z = (1/2) * (\partial/\partial x - i\, \partial/\partial y)$,

$\partial / \partial \bar{z} = (1/2) * (\partial/\partial x + i\, \partial/\partial y)$.

Kompleks funksiya $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ bo‘lsin. A-analitik strukturaning asosiy differensial munosabati quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$f_{\bar{z}} = A(z)\, f_z \quad (1)$$

bu yerda $A(z) = a(x,y) + ib(x,y)$ — berilgan kompleks koeffitsient bo‘lib, elliptiklikni ta’minlash uchun quyidagi shart bajariladi:

$$|A(z)| < 1 \quad (2)$$

A-analitik funksiyalar nazariyasida bunday differensial munosabatlar klassik analitik funksiyalar nazariyasining umumlashmasi sifatida qaraladi. A-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi formulalar va qatorlarga yoyilish kabi masalalar ham o‘rganilgan.

3. TADQIQOT MASALASINING QO‘YILISHI

3.1. Yangi differensial model

Ushbu ishda ikki o‘lchamli chegaralangan sohada statsionar issiqlik tarqalishi jarayonini qaraymiz. Soha $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$ bo‘lsin.

Issiqlik potensialini $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ kompleks funksiya yordamida ifodalaymiz. A-analitik struktura asosida quyidagi modelni qaraymiz:

$$f_{\bar{z}} = A\, f_z + F(x,y) \quad (3)$$

bu yerda A, F — berilgan funksiyalar. Mazkur tenglama (1) dagi A-analitik munosabatning tashqi ta’sir yoki issiqlik manbai bilan kengaytirilgan ko‘rinishi sifatida olinadi.

Yangi masalaning asosiy farqi shundaki, A-analitik struktura faqat nazariy jihatdan qaralmay, u sonli hisoblashga moslashtiriladi.

3.2. Modelni real tenglamalar sistemasiga ajratish

$f = u + iv$ bo‘lgani uchun:

$f_z = (1/2) * [(u_x + v_y) + i(v_x - u_y)]$,

$f_{\bar{z}} = (1/2) * [(u_x - v_y) + i(v_x + u_y)]$.

Soddalik uchun $A = a$ ko‘rinishdagi haqiqiy doimiy koeffitsientni olamiz ($|a| < 1$). Bundan:

$$f_{\bar{z}} = a\, f_z + F \quad (4)$$

kelib chiqadi. Agar $F = F_1 + i\, F_2$ bo‘lsa, (4) ning haqiqiy va mavhum qismlarini taqqoslab, quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$(1 - a)\, u_x - (1 + a)\, v_y = 2\, F_1 \quad (5)$$

$$(1 - a)\, v_x + (1 + a)\, u_y = 2\, F_2 \quad (6)$$

Shunday qilib, dastlabki kompleks differensial masala ikkita o‘zaro bog‘langan real differensial tenglamaga keltirildi.

4. CHEGARAVIY SHARTLAR

Hisoblash sohasi sifatida birlik kvadratni olamiz: $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Chegarada quyidagi shartlar beriladi:

$u(x,0) = u_0(x)$, $u(x,1) = u_1(x)$,

$v(0,y) = v_0(y)$, $v(1,y) = v_1(y)$.

Sonli hisoblashni tekshirish uchun aniq yechim oldindan ma’lum bo‘lgan test funksiyani tanlaymiz:

$u(x,y) = x^2 - y^2$ (7)

$v(x,y) = 2xy$ (8)

U holda $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$. Bu funksiya klassik analitik funksiya bo‘lib, A = 0 holatda A-analitik tenglamaning maxsus holatini ($f_{\bar{z}} = 0$) qanoatlantiradi. Ushbu test masala sonli algoritmning to‘g‘ri ishlashini tekshirish uchun ishlatiladi.

5. SONLI SXEMANI QURISH

Hisoblash sohasini quyidagi to‘r bilan almashtiramiz:

$x_i = i * h, \quad i = 0, 1, ..., N, \quad h = 1 / N$

$y_j = j * k, \quad j = 0, 1, ..., M, \quad k = 1 / M$

Ichki tugunlarda hosilalarni markaziy chekli ayirmalar bilan approksimatsiya qilamiz:

$u_x \approx (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) / (2h), \quad u_y \approx (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) / (2k)$

$v_x \approx (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) / (2h), \quad v_y \approx (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) / (2k)$

Natijada (5) va (6) tenglamalar quyidagi ko‘rinishga keladi:

$(1 - a) * (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) / (2h) - (1 + a) * (v_{i,j+1} - v_{i,j-1}) / (2k) = 2 F_{1,i,j}$ (9)

$(1 - a) * (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) / (2h) + (1 + a) * (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) / (2k) = 2 F_{2,i,j}$ (10)

(9)–(10) sistema tadqiq qilinayotgan masalaning sonli modeli hisoblanadi.

6. HISOBLASH ALGORITMI

Taklif qilinayotgan algoritm quyidagi bosqichlardan iborat:

1-bosqich: Hisoblash sohasi $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ va to‘r parametrlari (N,M) tanlanadi.

2-bosqich: A-analitik koeffitsient A = a beriladi va $|a| < 1$ shart tekshiriladi.

3-bosqich: Boshlang‘ich va chegaraviy qiymatlar hisoblash to‘riga o‘tkaziladi.

4-bosqich: (9)–(10) chekli-ayirmali sistema shakllantiriladi.

5-bosqich: Hosil bo‘lgan algebraik sistema iteratsion yoki to‘g‘ridan-to‘g‘ri chiziqli algebra usuli bilan yechiladi.

6-bosqich: Har bir tugunda $u_{i,j}$, $v_{i,j}$ qiymatlar aniqlanadi.

7-bosqich: Sonli yechim aniq yechim bilan taqqoslanadi.

8-bosqich: Maksimal absolyut xatolik E_u va E_v orqali baholanadi.

Kompleks yechim uchun xatolik mezoni:

$E = \max_{i,j} |f_{i,j} - f(x_i, y_j)|$ (11)

7. MASALA VA UNING YECHIMI

7.1. Test masala

Yangi sonli sxemani tekshirish uchun A = 0 va F = 0 holatni qaraymiz. Bu holda (3) tenglama $f_{\bar{z}} = 0$ (12) ko‘rinishga keladi.

Aniq yechim sifatida $f(z) = z^2$ (13) olamiz. Chunki $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Shuning uchun:

$u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy$

Haqiqatan ham, $u_x = 2x$, $u_y = -2y$, $v_x = 2y$, $v_y = 2x$. Shundan $u_x - v_y = 0$ va $v_x + u_y = 0$ kelib chiqadi. Demak, $f_{\bar{z}} = 0$ bevosita tekshiriladi.

7.2. Sonli yechim

A = 0 bo‘lganda (5)–(6) sistema:

$u_x - v_y = 0, \quad v_x + u_y = 0$

Chekli-ayirmali approksimatsiya (18)–(19) ko‘rinishda yoziladi va chegaraviy qiymatlar bilan yechiladi. Kvadratik funksiya hosilalari uchun markaziy ayirma formulasi

aniq qiymatni berganligi sababli, ushbu test masalada sonli sxema aniq yechimni to‘r tugunlarida to‘liq tiklaydi.

8. HISOBLASH NATIJALARI

8.1. Aniq va sonli yechimni taqqoslash

Test masala uchun $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ bo‘lganligi sababli sonli algoritm yordamida hisoblangan qiymatlar bilan aniq qiymatlar taqqoslanadi:

• (x=0.5, y=0.5) nuqtada: u = 0, v = 0.5 => f = 0.5i

• (x=0.25, y=0.5) nuqtada: u = -0.1875, v = 0.25 => f = -0.1875 + 0.25i

Ushbu qiymatlar sonli algoritmning test qiymatlari sifatida ishlatiladi.

8.2. Xatolikni baholash

Test funksiyasi kvadratik bo‘lgani sababli markaziy ayirmali hosila approksimatsiyasi ichki tugunlarda aniq qiymat beradi. Shu sababli nazariy test hisobida diskretlash xatoligi nolga teng bo‘lishi mumkin; amaliy kompyuter hisobida esa faqat kompyuter yaxlitlash xatoligi mavjud bo‘ladi. Bu natija taklif qilinayotgan algoritmning dastlabki verifikatsiyasi sifatida qaraladi.

9. MUHOKAMA

Olingan natijalar A-analitik strukturaning differensial jarayonlarni modellashtirishda foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi. Jabborov va Imomnazarov ishida A-analitik funksiyalar murakkab differensial tenglamalar sistemasining Koshi masalasini tadqiq qilish uchun qo‘llangan [1]. Mazkur maqolada esa shu nazariy apparatni sonli hisoblash yo‘nalishida davom ettirish taklif qilindi.

Ushbu yondashuvning afzalligi shundaki, nazariy A-analitik munosabat bevosita hisoblash algoritmiga olib kelinadi. Shuningdek, modelni yanada umumlashtirish, xususan, A = A(x,y) o‘zgaruvchi koeffitsient bo‘lgan holatda yoki F = F(x,y,f) ko‘rinishdagi tashqi manba mavjud bo‘lganda sonli algoritmni takomillashtirish mumkin.

10. ILMIY YANGILIK

1. A-analitik struktura asosida differensial jarayonning kompleks matematik modeli taklif qilindi.

2. Kompleks modelning real va mavhum qismlariga mos differensial tenglamalar sistemasi hosil qilindi.

3. Mazkur sistema uchun markaziy chekli-ayirmali approksimatsiya asosida sonli sxema ishlab chiqildi.

4. Sonli sxema asosida hisoblash algoritmining ketma-ketligi ishlab chiqildi.

5. Aniq yechimga ega test-masala yordamida algoritmning matematik verifikatsiyasi amalga oshirildi.

11. XULOSA

Maqolada A-analitik struktura asosida differensial jarayonni matematik modellashtirish va sonli yechish masalasi qaraldi. A-analitik munosabat kompleks ko‘rinishda berilib, uning real va mavhum qismlari orqali bog‘langan differensial tenglamalar sistemasi hosil qilindi.

Ushbu sistema uchun chekli-ayirmali sonli sxema ishlab chiqildi va hisoblash algoritmining asosiy bosqichlari ko‘rsatildi. Aniq yechimga ega test-masala orqali sonli sxemaning ishlashi tekshirildi.

Kelgusida A = A(x,y) o‘zgaruvchi holatini, nochiziqli tashqi manba F = F(x,y,f) mavjud bo‘lgan modellarni hamda yuqori aniqlikdagi sonli sxemalarni tadqiq qilish rejalashtiriladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Imomnazarov Kh.Kh., Jabborov N.M. Application of A-analytic functions to the investigation of the Cauchy problem for a stationary poroelasticity system. Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2019, Vol. 65, No. 1, pp. 33–43. DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-33-43.
2. Vekua I.N. Generalized Analytic Functions. Nauka, Moscow, 1988.
3. Bitsadze A.V. Some Classes of Partial Differential Equations. Nauka, Moscow, 1981.
4. Aizenberg L.A. Carleman Formulas in Complex Analysis. Nauka, Novosibirsk, 1990.
5. Sadullaev A., Jabborov N.M. On a class of A-analytic functions.
6. Zhabborov N.M., Otaboev T.U., Khursanov Sh.Ya. The Schwarz inequality and the Schwarz formula for A-analytic functions.