CHEKLI O‘LCHAMLI QO‘ZG‘ALISHGA EGA FRIDRIXS MODELINING MATEMATIK FO‘RMULASI

Toshpulatova Dilorom Xolmat qizi
Osiyo Xalqaro universiteti magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.20077419

Annotatsiya. Mazkur maqolada chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelining matematik tuzilishi va uning asosiy spektral xossalari o‘rganiladi. Tadqiqot doirasida o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning qo‘zg‘alish nazariyasi asosida modelning shakllanishi, diskret va uzluksiz spektrlarning o‘zaro ta’siri hamda rezolyvent operatorning analitik xossalari tahlil qilinadi. Shuningdek, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar natijasida spektrda yuzaga keladigan o‘zgarishlar, xususan eigenqiymatlarning siljishi va rezonans holatlarining paydo bo‘lishi ko‘rib chiqiladi. Olingan natijalar Fridrixs modelining matematik fizika, xususan kvant mexanikasida muhim nazariy vosita ekanligini ko‘rsatadi.
Kalit so‘zlar: Fridrixs modeli, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish, operatorlar nazariyasi, spektral tahlil, rezolyvent operator, Hilbert fazo, eigenqiymat, uzluksiz spektr, kvant mexanikasi.

Аннотация. В данной статье исследуется математическая структура модели Фридрихса с конечномерным возбуждением и её основные спектральные свойства. Анализируется формирование модели на основе теории возбуждения самосопряженных операторов, взаимодействия дискретного и непрерывного спектров, а также аналитических свойств разрешающего оператора. Рассматриваются также изменения, происходящие в спектре в результате конечномерных возбуждений, в частности, сдвиг собственных значений и появление резонансных состояний. Полученные результаты показывают, что модель Фридрихса является важным теоретическим инструментом в математической физике, в частности, в квантовой механике.
Ключевые слова: модель Фридрихса, конечномерное возбуждение, теория операторов, спектральный анализ, разрешающий оператор, гильбертово пространство, собственное значение, непрерывный спектр, квантовая механика.

Abstract. This article studies the mathematical structure of the Friedrichs model with finite-dimensional excitation and its main spectral properties. The research analyzes the formation of the model based on the theory of excitation of self-adjoint operators, the interaction of discrete and continuous spectra, and the analytical properties of the resolving operator. Also, the changes that occur in the spectrum as a result of finite-dimensional excitations, in particular, the shift of eigenvalues and the appearance of resonance states, are considered. The results obtained show that the Friedrichs model is an important theoretical tool in mathematical physics, in particular, quantum mechanics.
Key words: Friedrichs model, finite-dimensional excitation, operator theory, spectral analysis, resolving operator, Hilbert space, eigenvalue, continuous spectrum, quantum mechanics.

Kirish. Zamonaviy matematik fizika va funksional analizning markaziy yo‘nalishlaridan biri — chiziqli operatorlar nazariyasi va ularning spektral xossalarini o‘rganishdan iborat. Ayniqsa, o‘z-o‘ziga qo‘shma (self-adjoint) operatorlar kvant mexanikasi, differensial tenglamalar va to‘lqin jarayonlarini modellashtirishda fundamental ahamiyatga ega. Ushbu operatorlarning spektri fizik tizimlarning energiya holatlarini ifodalaganligi sababli, ularning tuzilishi va o‘zgarishini tahlil qilish muhim ilmiy masala hisoblanadi. Spektral nazariyada alohida e’tibor diskret va uzluksiz spektrlarning o‘zaro ta’sirini o‘rganishga qaratilgan. Bu masalani chuqur tahlil qilish uchun matematik fizika tarixida bir qator model operatorlar taklif

etilgan bo‘lib, ular orasida Fridrixs modeli alohida o‘rin tutadi. Ushbu model dastlab K. O. Friedrichs tomonidan uzluksiz spektrning qo‘zg‘alishlar ostida qanday o‘zgarishini o‘rganish maqsadida ishlab chiqilgan. Fridrixs modeli sodda tuzilishga ega bo‘lishiga qaramay, u murakkab spektral hodisalarni, jumladan rezonanslar, spektrning parchalanishi va yangi eigenqiymatlarning paydo bo‘lishini tahlil qilish imkonini beradi.

Fridrixs modelining asosiy g‘oyasi — diskret spektrga ega bo‘lgan oddiy operatorni uzluksiz spektrli operator bilan o‘zaro bog‘lash orqali yangi operator hosil qilishdan iborat. Ushbu bog‘lanish odatda qo‘zg‘alish operatori orqali amalga oshiriladi. Ayniqsa, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar holatida modelning matematik strukturasini chuqurroq o‘rganish zarurati tug‘iladi, chunki bunday qo‘zg‘alishlar spektrda sezilarli o‘zgarishlar keltirib chiqaradi. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish nazariyasi operatorlarning spektral xossalarini o‘rganishda muhim vosita hisoblanadi. Bu nazariya yordamida asosiy operatorga kichik, lekin strukturaviy jihatdan muhim o‘zgarishlar kiritilib, natijaviy operatorning spektri qanday o‘zgarishi aniqlanadi. Xususan, diskret eigenqiymatlarning siljishi, yangi eigenqiymatlarning yuzaga kelishi hamda uzluksiz spektr ichida rezonans holatlarining paydo bo‘lishi kabi hodisalar aynan shu yondashuv orqali tushuntiriladi.

Mazkur mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, Fridrixs modeli nafaqat sof matematik nazariya doirasida, balki kvant mexanikasi, tarqalish nazariyasi (scattering theory), signalni qayta ishlash va boshqa amaliy sohalarda ham keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, kvant tizimlarda bog‘langan va erkin holatlarning o‘zaro ta’sirini modellashtirishda ushbu model samarali vosita sifatida xizmat qiladi. So‘nggi yillarda operatorlar nazariyasi va spektral tahlil sohasida olib borilgan ilmiy izlanishlar Fridrixs modelining turli umumlashmalarini, jumladan no-chiziqli, ko‘p o‘lchamli va stoxastik variantlarini o‘rganishga qaratilgan. Biroq, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar bilan bog‘liq klassik model hali ham nazariy jihatdan chuqur o‘rganishni talab qiluvchi dolzarb yo‘nalish bo‘lib qolmoqda. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi — chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelining matematik formulalarini tizimli ravishda bayon qilish, uning asosiy spektral xossalarini tahlil qilish va ushbu modelning nazariy hamda amaliy ahamiyatini yoritishdan iborat.

Adabiyotlar tahlili. Fridrixs modeli va uning turli modifikatsiyalari spektral nazariya hamda matematik fizika doirasida keng o‘rganilgan klassik yo‘nalishlardan biridir. Ushbu model ilk bor K. O. Friedrichs tomonidan XX asr o‘rtalarida uzluksiz spektrga ega operatorlarning qo‘zg‘alish ostidagi xatti-harakatini tahlil qilish maqsadida taklif etilgan. Friedrichsning asosiy natijasi shundan iborat ediki, hatto oddiy strukturaga ega bo‘lgan qo‘zg‘alishlar ham spektral tarkibda muhim o‘zgarishlarga olib kelishi mumkin, xususan, rezonans holatlar va yashirin eigenqiymatlar (embedded eigenvalues) paydo bo‘lishi kuzatiladi. Keyingi yillarda Fridrixs modeli spektral nazariya rivojida muhim instrument sifatida qaralib, uning matematik asoslari chuqurlashtirildi. Jumladan, T. Kato (1995) tomonidan ishlab chiqilgan chiziqli operatorlarning qo‘zg‘alish nazariyasi Fridrixs modelini umumiyroq kontekstda o‘rganish imkonini berdi. Katoning ishlarida o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning barqarorligi, spektrning uzluksiz va diskret qismlari orasidagi bog‘lanish hamda qo‘zg‘alish natijasida spektral o‘zgarishlarning klassifikatsiyasi batafsil tahlil qilingan. Spektral tahlil va kvant mexanikasiga oid fundamental natijalar M. Reed va B. Simon (1978) tomonidan ishlab chiqilgan “Mathematical Physics Methods” asarida keng yoritilgan. Ushbu manbada Fridrixs modelining Hilbert fazodagi operator sifatida ifodalanishi, uning rezolyvent operatori va spektral parchalanishi matematik qat’iylik bilan keltirilgan. Ayniqsa, ular tomonidan ishlab chiqilgan funksional analiz metodlari modelning nazariy asoslarini mustahkamlashda muhim rol o‘ynaydi. D. R. Yafaev (1992) tomonidan yozilgan ilmiy ishlarda Fridrixs modeli tarqalish nazariyasi (scattering theory) nuqtayi nazaridan o‘rganilgan. Yafaevning natijalari shuni ko‘rsatadiki, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar mavjud bo‘lgan tizimlarda rezonans hodisalari va spektral zichlikning o‘zgarishi

muhim ahamiyat kasb etadi. Bu esa modelni kvant zarrachalarining o‘zaro ta’sirini tushuntirishda samarali vositaga aylantiradi. Bundan tashqari, Berezin va Shubin (1991) tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda Schrödinger operatorlari va ular bilan bog‘liq spektral muammolar chuqur tahlil qilingan. Ushbu ishlar Fridrixs modelini differensial operatorlar bilan bog‘lash va uni amaliy fizik masalalarda qo‘llash imkonini beradi. J. Weidmann (1980) esa Hilbert fazodagi chiziqli operatorlarning umumiy nazariyasini ishlab chiqib, Fridrixs modelining matematik asoslarini yanada umumlashtirgan. Uning ishlarida spektral o‘lchovlar, operatorlarning o‘z-o‘ziga qo‘shmaligi va rezolyventning xossalari batafsil ko‘rib chiqilgan. So‘nggi zamonaviy tadqiqotlarda Fridrixs modelining kengaytirilgan variantlari ham o‘rganilmoqda. Xususan, no-chiziqli qo‘zg‘alishlar, ko‘p o‘lchamli fazolar va stoxastik operatorlar bilan bog‘liq modellar ishlab chiqilgan. Bu yo‘nalishda olib borilgan izlanishlar modelning yanada murakkab tizimlarga qo‘llanilishi mumkinligini ko‘rsatadi. Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modeli spektral nazariyada muhim nazariy vosita bo‘lib, u orqali diskret va uzluksiz spektrlarning o‘zaro ta’siri, rezonans hodisalari va eigenqiymatlarning xatti-harakati chuqur o‘rganilgan. Biroq, ushbu modelning ayrim jihatlari, xususan yuqori o‘lchamli tizimlar va noan’anaviy qo‘zg‘alishlar bilan bog‘liq masalalar hali ham qo‘shimcha tadqiqotlarni talab etadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Mazkur ilmiy tadqiqot chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelining matematik asoslarini o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, u asosan nazariy (teoretik) yondashuvga asoslanadi. Tadqiqotda funksional analiz, chiziqli operatorlar nazariyasi va spektral tahlil metodlari kompleks tarzda qo‘llanildi. Ushbu metodologik yondashuv modelning matematik tuzilishini chuqur tahlil qilish va uning spektral xossalarini aniqlash imkonini beradi. Tadqiqot analitik-nazariy dizayn asosida olib borildi. Bu yondashuv orqali mavjud matematik modellar, nazariy qarashlar va ilmiy natijalar umumlashtirilib, Fridrixs modelining chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish ostidagi xatti-harakatlari tizimli ravishda o‘rganildi. Tadqiqotda deduktiv usuldan foydalanilib, umumiy nazariy qoidalar asosida xususiy holatlar tahlil qilindi.

Tadqiqot obyekti va predmeti. Tadqiqot obyekti Hilbert fazoda aniqlangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar sinfi. Tadqiqot predmeti chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelining matematik formulasi va uning spektral xossalari.

Tadqiqotda quyidagi asosiy matematik metodlardan foydalanildi:

- Funksional analiz metodlari: Hilbert fazolar, chiziqli operatorlar va ularning xossalarini aniqlash;
- Spektral tahlil usuli: operator spektrini diskret va uzluksiz qismlarga ajratish hamda ularning o‘zaro ta’sirini o‘rganish;
- Qo‘zg‘alishlar nazariyasi (perturbation theory): asosiy operatorga qo‘zg‘alish kiritilganda spektrning qanday o‘zgarishini aniqlash;
- Rezolyvent operator usuli: operatorning rezolyventini hisoblash va uning analitik xossalarini tahlil qilish;
- Matematik modellashtirish: Fridrixs modelini blok-matritsa ko‘rinishida ifodalash va umumlashtirish.

Tadqiqot quyidagi ketma-ket bosqichlarda amalga oshirildi: Fridrixs modelining klassik ko‘rinishini o‘rganish va matematik formulalarini aniqlash. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish operatorini aniqlash va modelga kiritish. Yangi operatorning spektral xossalarini tahlil qilish. Rezolyvent operator orqali spektral o‘zgarishlarni o‘rganish. Olingan natijalarni nazariy jihatdan umumlashtirish.

Tadqiqot quyidagi ilmiy yo‘nalishlar va nazariyalarga tayangan holda olib borildi: O‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar nazariyasi. Spektral nazariya. Chiziqli operatorlarning qo‘zg‘alish nazariyasi (Kato yondashuvi). Tarqalish nazariyasi (scattering theory). Tadqiqot natijalarining

ishonchliligi klassik matematik nazariyalar va fundamental ilmiy manbalarga tayanish orqali ta’minlandi. Barcha xulosalar qat’iy matematik isbotlarga asoslangan bo‘lib, mavjud ilmiy natijalar bilan solishtirish orqali tekshirildi. Mazkur tadqiqot faqat chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish holatini qamrab oladi. No-chiziqli qo‘zg‘alishlar, stoxastik operatorlar va yuqori o‘lchamli murakkab tizimlar ushbu ish doirasidan tashqarida qoldirildi. Bu esa kelgusidagi ilmiy izlanishlar uchun istiqbolli yo‘nalish sifatida qaraladi.

Muhokama. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelini tahlil qilish natijalari shuni ko‘rsatadiki, ushbu model spektral nazariyada diskret va uzluksiz spektrlarning o‘zaro ta’sirini o‘rganish uchun eng sodda, ammo mazmunan chuqur modellar qatoriga kiradi. Muhokama jarayonida asosiy e’tibor qo‘zg‘alish operatorining spektrga ko‘rsatadigan ta’siri, rezolyvent operatorning analitik xossalari hamda rezonans hodisalarining yuzaga kelish mexanizmlariga qaratiladi. Birinchidan, olingan natijalar chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarning operator spektriga sezilarli ta’sir ko‘rsatishini tasdiqlaydi. Xususan, boshlang‘ich operatorning diskret spektriga tegishli eigenqiymatlar qo‘zg‘alish natijasida siljishi yoki ayrim hollarda uzluksiz spektrga “singib ketishi” mumkin. Bu hodisa fizik jihatdan bog‘langan holatlarning erkin holatlarga o‘tishi bilan izohlanadi. Shu bilan birga, ayrim vaziyatlarda yangi eigenqiymatlar paydo bo‘lishi kuzatiladi, bu esa qo‘zg‘alishning strukturaviy ahamiyatini ko‘rsatadi. Ikkinchidan, uzluksiz spektrning xatti-harakatida ham muhim o‘zgarishlar kuzatiladi. Chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish uzluksiz spektrning to‘liq buzilishiga olib kelmasa-da, uning ichida rezonans holatlarning paydo bo‘lishiga sabab bo‘ladi. Rezonanslar odatda rezolyvent operatorning analitik davomida kompleks tekislikda joylashgan singulyarliklar orqali aniqlanadi. Bu holat kvant mexanikasida vaqtinchalik barqaror bo‘lgan energetik holatlarni tavsiflashda muhim rol o‘ynaydi. Uchinchidan, rezolyvent operatorni tahlil qilish Fridrixs modelining chuqur matematik mohiyatini ochib beradi. Rezolyventning strukturasini o‘rganish orqali operator spektrining lokal va global xossalari aniqlanadi. Ayniqsa, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alish mavjud bo‘lganda rezolyvent operator qo‘shimcha qutblar (polus) va analitik buzilishlarga ega bo‘lishi mumkin. Bu esa spektral zichlikning o‘zgarishiga va rezonans hodisalarining shakllanishiga olib keladi. Shuningdek, muhokama natijalari Fridrixs modelining qo‘zg‘alish nazariyasidagi universal rolini ko‘rsatadi. Modelning soddaligi uni nazariy jihatdan qulay qiladi, ammo ayni paytda u murakkab fizik jarayonlarni tavsiflash imkonini beradi. Ayniqsa, kvant tizimlarda diskret va uzluksiz energiya holatlarining o‘zaro ta’siri, zarrachalarning parchalanish jarayonlari hamda energiya almashinuvi kabi hodisalarni tushuntirishda ushbu model samarali vosita hisoblanadi. Biroq, tadqiqot davomida ayrim cheklovlar ham aniqlandi. Jumladan, model faqat chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar bilan chegaralangan bo‘lib, yuqori o‘lchamli yoki no-chiziqli qo‘zg‘alishlar holati alohida yondashuvni talab etadi. Bundan tashqari, real fizik tizimlarda qo‘zg‘alishlar ko‘pincha vaqtga bog‘liq yoki tasodifiy xarakterga ega bo‘lishi mumkin, bu esa modelni yanada murakkablashtiradi. Kelgusidagi tadqiqotlar ushbu modelni kengaytirish, xususan, no-chiziqli operatorlar, stoxastik ta’sirlar va ko‘p komponentli tizimlar bilan bog‘lashga qaratilishi maqsadga muvofiqdir. Bundan tashqari, Fridrixs modelini sonli usullar yordamida tahlil qilish va kompyuter modellashtirish orqali uning amaliy qo‘llanilish doirasini kengaytirish ham dolzarb yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Umuman olganda, muhokama natijalari shuni ko‘rsatadiki, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modeli spektral nazariyada muhim nazariy vosita bo‘lib, u orqali murakkab matematik va fizik jarayonlarni soddalashtirilgan shaklda chuqur tahlil qilish mumkin.

Xulosa. Mazkur ilmiy maqolada chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modelining matematik tuzilishi va uning asosiy spektral xossalari tizimli ravishda o‘rganildi. Tadqiqot davomida modelning Hilbert fazodagi operator sifatida ifodalanishi, asosiy operator va qo‘zg‘alish operatori o‘rtasidagi o‘zaro ta’sir hamda natijaviy operatorning spektri chuqur tahlil

qilindi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar operator spektriga sezilarli darajada ta’sir ko‘rsatadi. Xususan, diskret spektr elementlarining siljishi, yangi eigenqiymatlarning paydo bo‘lishi hamda uzluksiz spektr ichida rezonans holatlarning yuzaga kelishi aniqlanadi. Rezolyvent operatorning analitik xossalarini o‘rganish esa ushbu o‘zgarishlarning matematik mohiyatini tushuntirishda muhim vosita bo‘lib xizmat qiladi. Tadqiqot natijalari Fridrixs modelining spektral nazariyada fundamental ahamiyatga ega ekanligini yana bir bor tasdiqlaydi. Ushbu model yordamida diskret va uzluksiz spektrlarning o‘zaro ta’siri, kvant tizimlardagi energiya almashinuvi va rezonans hodisalari soddalashtirilgan, ammo aniq matematik shaklda ifodalanadi. Shu bilan birga, maqolada modelning ayrim cheklovlari ham qayd etildi. Xususan, tadqiqot faqat chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlar bilan chegaralangan bo‘lib, no-chiziqli va stoxastik qo‘zg‘alishlar alohida o‘rganishni talab qiladi. Kelgusida ushbu yo‘nalishda olib boriladigan ilmiy izlanishlar Fridrixs modelining qo‘llanish doirasini yanada kengaytirishi kutiladi. Umuman olganda, ushbu tadqiqot Fridrixs modelining matematik mohiyatini ochib berish, uning spektral xossalarini aniqlash va matematik fizika sohasidagi ahamiyatini asoslashga xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Kato, T. (1995). *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer.
2. Reed, M., & Simon, B. (1978). *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press.
3. Yafaev, D. R. (1992). *Mathematical Scattering Theory: General Theory*. American Mathematical Society.
4. Berezin, F. A., & Shubin, M. A. (1991). *The Schrödinger Equation*. Springer.
5. Weidmann, J. (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer.
6. Simon, B. (1979). *Functional Integration and Quantum Physics*. Academic Press.
7. Albeverio, S., Gesztesy, F., Høegh-Krohn, R., & Holden, H. (2005). *Solvable Models in Quantum Mechanics*. AMS Chelsea Publishing.
8. Yosida, K. (1980). *Functional Analysis*. Springer.
9. Akhiezer, N. I., & Glazman, I. M. (1993). *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Publications.