TODA TENGLAMASINING SHAKLLANISHI VA RIVOJLANISH EVOLYUTSIYASI: NOCHIZIQLI PANJARA MODELLIDAN INTEGRALLANUVCHI TIZIMGACHA

Yusupova Shohida Rashid qizi
E-mail: shohida1412@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.22923312

Annotatsiya

Mazkur maqolada Toda tenglamasining shakllanishi va rivojlanish evolyutsiyasi tarixiy-matematik nuqtayi nazardan tadqiq etiladi. Tadqiqot Morikazu Todaning 1967-yilda nochiziqli o‘zaro ta’sirlashuvchi zarrachalar zanjiri uchun taklif qilgan modelidan boshlanib, anharmonik panjaralardagi to‘lqinlar, solitary-wave va soliton hodisalarining o‘rganilishi, 1974-yilda Michel Hénon tomonidan Toda panjarasining saqlanuvchi integrallarining aniqlanishi, Hermann Flaschka tomonidan integrallarning mavjudligi va tizimning Korteweg–de Vries tenglamasi bilan aloqasining asoslanishi hamda 1975-yilda Jürgen Moser tomonidan Toda tizimining izospektral deformatsiyalar bilan bog‘lanishigacha bo‘lgan ilmiy jarayonni qamrab oladi. Tadqiqotda Toda, Hénon, Flaschka va Moserning original ilmiy ishlari asosiy birlamchi manbalar sifatida, keyingi ilmiy sharhlar esa ularning natijalarini tizimlashtirish vositasi sifatida qo‘llanadi. Tahlil natijasida Toda tenglamasining oddiy nochiziqli panjara modeli sifatida shakllanganidan keyin qisqa tarixiy davr ichida saqlanuvchi integrallarga ega to‘liq integrallanuvchi Hamilton tizim sifatida rivojlanganligi ko‘rsatiladi. Ayniqsa, 1974–1975-yillardagi Hénon–Flaschka–Moser ishlari Toda panjarasining zamonaviy integrallanuvchi tizimlar nazariyasidagi matematik asoslarini shakllantirgan hal qiluvchi bosqich sifatida talqin qilinadi.

Kalit so‘zlar: Toda tenglamasi, Toda panjarasi, nochiziqli panjara, anharmonik tebranish, solitary wave, soliton, saqlanuvchi integral, integrallanuvchi tizim, Flaschka o‘zgaruvchilari, Lax juftligi, izospektral deformatsiya, Hamilton tizimi.

Kirish

Nochiziqli dinamik tizimlar nazariyasining rivojlanishi XX asr matematik fizikasi tarixidagi muhim ilmiy jarayonlardan biridir. Chiziqli modellar ko‘plab fizik jarayonlarning umumiy xususiyatlarini tavsiflash imkonini bergan bo‘lsa-da, real tizimlarda o‘zaro ta’sirlarning nochiziqli tabiati to‘lqinlarning tarqalishi, energiyaning lokalizatsiyasi, barqaror harakatlar va to‘lqinlarning o‘zaro ta’siri kabi hodisalarni tushuntirish uchun murakkabroq matematik modellarni talab qildi. Shu ilmiy muhitda Morikazu Toda tomonidan taklif etilgan nochiziqli panjara modeli keyinchalik integrallanuvchi tizimlar nazariyasining fundamental namunalaridan biriga aylandi.

Toda panjarasining boshlanishi 1967-yilga borib taqaladi. Todaning “Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction” maqolasi *Journal of the Physical Society of Japan* jurnalining 22-jildida 431–436-betlarda nashr etilgan [1]. Mazkur ishda nochiziqli kuch bilan o‘zaro ta’sirlashuvchi zarrachalar zanjirining tebranishlari o‘rganilib, maxsus o‘zaro ta’sir potensiali uchun aniq yechimlarni olish masalasi tadqiq qilingan. Keyingi “Wave Propagation in Anharmonic Lattices” ishida Toda anharmonik panjaralarda to‘lqinlarning tarqalishi va

solitary-wave yechimlarini o‘rgandi [2]. Shu tariqa dastlabki mexanik model asta-sekin nochiziqli to‘lqinlar nazariyasining muhim obyektiga aylandi.

Toda panjarasining keyingi rivojlanishida 1970-yildagi “Waves in Nonlinear Lattice” maqolasi alohida ahamiyatga ega bo‘ldi. Unda nochiziqli panjaralarda pulse-like, ya’ni soliton xarakteridagi to‘lqinlar o‘rganilib, ularning o‘zaro ta’sirdan keyin shaklini saqlash xususiyatlari tahlil qilindi [3]. Biroq Toda modelining haqiqiy matematik burilishi 1974–1975-yillarda sodir bo‘ldi. Aynan shu davrda Hénon, Flaschka va Moser ishlari orqali modelning saqlanuvchi integrallari, integrallanuvchanligi, matritsali tasviri va izospektral deformatsiyalar bilan bog‘liqligi chuqur asoslandi.

Mazkur maqolaning maqsadi Toda tenglamasining ushbu evolyutsiyasini bir-biridan uzilgan tarixiy faktlar sifatida emas, balki fizik model → nochiziqli to‘lqinlar → solitonlar → saqlanuvchi integrallar → integrallanuvchanlik → izospektral dinamika tarzidagi yagona ilmiy rivojlanish zanjiri sifatida tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqot metodologiyasi

Tadqiqot tarixiy-matematik tahlil, manbashunoslik, qiyosiy tahlil va matematik modellashtirish usullariga asoslangan. Manba bazasining birinchi qatlamini Toda tomonidan 1967–1970-yillarda nashr etilgan original tadqiqotlar tashkil etadi. Ikkinchi qatlamga 1974-yildagi Hénon va Flaschka maqolalari hamda 1975-yildagi Moserning fundamental tadqiqoti kiritildi. Ushbu ishlar keyingi sharh va monografik manbalar bilan qiyosiy o‘rganildi.

Bunday metodologik yondashuv Toda tenglamasi tarixini faqat keyingi darslik va sharhlardan qayta tiklashning oldini oladi. Aksincha, har bir tarixiy bosqichning ilmiy mazmuni imkon qadar o‘sha davrning original maqolalari orqali aniqlanadi. Ayniqsa, 1974-yilgi Hénon va Flaschka maqolalarini alohida tahlil qilish muhim, chunki ular Toda tizimining integrallanuvchanligi haqida mustaqil, bir-birini to‘ldiruvchi natijalarni taqdim etgan.

Toda panjarasining dastlabki modeli

Toda modelining asosida bir o‘lchamli zarrachalar zanjiri yotadi. Zarrachalarning koordinatalari $x_n(t)$ bilan belgilanganda, qo‘shni zarrachalar orasidagi o‘zaro ta’sir nochiziqli potensial orqali ifodalanadi. Klassik Toda panjarasining keng qo‘llanadigan ko‘rinishi

$$\ddot{x}_n = e^{x_{n-1}-x_n} - e^{x_n-x_{n+1}}$$

tarzida yoziladi.

Bu tenglamaning muhim jihati shundaki, zarrachalar orasidagi kuch oddiy chiziqli Hooke qonuni bilan emas, balki eksponensial funksiya orqali ifodalanadi. Aynan shu maxsus nochiziqli o‘zaro ta’sir Toda modelining keyinchalik analitik jihatdan integrallanuvchi tizim sifatida namoyon bo‘lishiga imkon bergan asosiy xususiyatlardan biridir.

Todaning 1967-yildagi original ishida asosiy e’tibor bunday nochiziqli zanjirning tebranish xususiyatlarini aniqlashga qaratilgan edi [1]. Shuni alohida ta’kidlash kerakki, Toda o‘sha dastlabki bosqichda keyinchalik shakllangan “to‘liq integrallanuvchi tizim” formalizmini hali yakunlagan emas edi. Demak, Toda tenglamasining tarixini retrospektiv tarzda faqat uning keyingi matematik xususiyatlari orqali talqin qilish metodologik jihatdan to‘liq bo‘lmaydi.

Anharmonik to‘lqinlar va solitary-wave yechimlari

1967-yilda Toda “Wave Propagation in Anharmonic Lattices” maqolasida modelning to‘lqin xususiyatlarini kengaytirdi [2]. Bu ishda anharmonik panjaralarda wave-train va solitary-wave yechimlari o‘rganildi. Natijada Toda modeli oddiy zarrachalar zanjirining tebranish modelidan nochiziqli to‘lqinlar tarqalishini o‘rganish uchun ishlatiladigan matematik modelga aylandi.

1970-yilda Toda “Waves in Nonlinear Lattice” maqolasida ushbu yo‘nalishni yanada rivojlantirdi. *Progress of Theoretical Physics Supplement* jurnalining 45-sonida 174–200-betlarda chop etilgan mazkur tadqiqotda nochiziqli panjaralardagi to‘lqinlarning xususiyatlari va solitonlar batafsil tahlil qilindi [3]. Bu bosqich Toda panjarasining tarixida muhim ahamiyatga ega, chunki solitonlarning lokalizatsiyalangan va barqaror to‘lqin sifatidagi xususiyatlari keyingi integrallanuvchi tizimlar nazariyasi bilan bevosita bog‘lanadi.

Hénonning 1974-yildagi natijasi: saqlanuvchi integrallarning aniqlanishi

Toda panjarasining matematik tarixida 1974-yil alohida o‘rin egallaydi. Michel Hénonning “Integrals of the Toda lattice” maqolasi *Physical Review B*, 9-jild, 4-sonida 1921–1923-betlarda chop etilgan [4]. Maqola 1974-yil 15-fevralda nashr etilgan va 1973-yil 13-avgustda qabul qilingan [4].

Hénonning asosiy natijasi Toda panjarasining integrallanuvchi dinamik tizim ekanligini ko‘rsatish va saqlanuvchi kattaliklarning aniq to‘plamini berishdan iborat edi. Muallif n ta zarrachadan iborat davriy panjara uchun n ta integralning aniq ifodasini beradi; qat’iy uchlari mavjud holat ham alohida ko‘rib chiqiladi. Bundan tashqari, olingan integrallarning boshqa shakli cheksiz panjaraga ham kengaytirilishi mumkinligi ko‘rsatiladi [4].

Bu natijaning tarixiy ahamiyati shundaki, Toda modelining integrallanuvchanligi endi faqat numerik kuzatuv yoki fizik sezgi darajasidagi taxmin bo‘lib qolmay, aniq matematik ifodalar bilan bog‘landi. APS manbasida ham Hénonning ishi Toda eksponensial panjarasini integrallanuvchi dinamik tizim sifatida ko‘rsatgani va n zarrachali tizim uchun n ta integralni aniq bergani qayd etilgan.

Shunday qilib, Hénonning 1974-yilgi maqolasi Toda tenglamasi tarixida “modelning fizik jihatdan qiziqarli bo‘lishi”dan “integrallanuvchi matematik tizim sifatida tan olinishi”ga o‘tishdagi muhim bosqich hisoblanadi.

Flaschkaning 1974-yildagi ishi: integrallanuvchanlikning matematik asoslanishi

Hermann Flaschkaning “The Toda lattice. II. Existence of integrals” maqolasi Hénon ishidan o‘sha sonning o‘zida, ya’ni 1974-yil 15-fevralda chop etilgan. Maqola *Physical Review B*, 9-jild, 4-son, 1924–1925-betlarda joylashgan [5].

Flaschka Hénon tomonidan topilgan saqlanuvchi kattaliklardan kelib chiqadigan masalani boshqa metod orqali o‘rganadi. Uning yondashuvi Toda panjarasining integrallarining mavjudligini asoslash bilan birga, tizimning Korteweg–de Vries (KdV) tenglamasining chekli o‘lchamli analogi sifatida talqin qilinishiga yo‘l ochadi [5].

Flaschkaning maqolasida Toda tenglamalarining ayrim integrallari KdV tenglamasidagi saqlanuvchi kattaliklarning diskret/chekli o‘lchamli analoglari sifatida qaraladi. Shuningdek, maqolada ishlab chiqilgan nazariya keyinchalik cheksiz panjaraning yechimlarini inverse-scattering usullari orqali olishda qo‘llanilgani ko‘rsatiladi [5].

Flaschkaning shu davrdagi yana bir muhim ishi “On the Toda Lattice. II: Inverse-Scattering Solution” bo‘lib, u 1974-yil mart oyida *Progress of Theoretical Physics* jurnalida

51-jild, 3-son, 703–716-betlarda chop etilgan. Unda Toda eksponensial panjarasini yechish uchun inverse-scattering usuli ishlab chiqilib, umumiy *N*-soliton formulasi hosil qilingan va harakat integrallari scattering data orqali ifodalangan [6].

Shunday qilib, Hénon va Flaschka ishlarini birgalikda ko‘rish muhim: Hénon saqlanuvchi integrallarning aniq ifodalarini berdi, Flaschka esa integrallarning mavjudligi va tizimning chuqur integrallanuvchi tuzilishini boshqa matematik yondashuv bilan asoslab, inverse-scattering nazariyasiga yo‘l ochdi.

Moserning 1975-yildagi hissasi: izospektral deformatsiyalar

Toda panjarasining keyingi matematik rivojlanishida Jürgen Moserning 1975-yildagi “Three Integrable Hamiltonian Systems Connected with Isospectral Deformations” maqolasi alohida o‘rin egallaydi [7]. Mazkur ish *Advances in Mathematics*, 16-jild, 2-sonida 197–220-betlarda 1975-yil 1-mayda nashr etilgan. DOI: 10.1016/0001-8708(75)90151-6.

Moserning ishida Toda tizimi izospektral deformatsiyalar bilan bog‘liq integrallanuvchi Hamilton tizimlari kontekstida ko‘rib chiqiladi. Bu yondashuv Toda panjarasining dinamikasini oddiy koordinatalar evolyutsiyasidan tashqari, matritsaning spektral xususiyatlari saqlanadigan geometrik jarayon sifatida ko‘rishga imkon berdi.

Keyingi ilmiy sharhlarda Moserning hissasi aynan shu nuqtayi nazardan izohlanadi: Flaschka Toda panjarasini simmetrik uchdiagonal matritsalar fazosidagi oqim sifatida integrallanuvchi tizimga aylantirgan bo‘lsa, Moser uning proyektiv fazodagi gradient oqimi sifatidagi geometrik talqinini rivojlantirgan [8]. Zamonaviy sharhlarda Toda panjarasining integrallanuvchanligi aynan Flaschka va Moser ishlari bilan bog‘lab ko‘rsatiladi.

Moserning 1975-yildagi yana bir ishi — “Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential—An integrable system” — Toda tipidagi eksponensial potensial ostidagi chekli massalar tizimini alohida integrallanuvchi tizim sifatida o‘rganadi [9]. Bu ish ham Toda modelining mexanik mazmuni va integrallanuvchanligi o‘rtasidagi bog‘liqlikni yanada chuqurlashtiradi.

Hénon–Flaschka–Moser bosqichining tarixiy ahamiyati

1974–1975-yillardagi uchta asosiy tadqiqotni ketma-ket ko‘rib chiqish Toda tenglamasining matematik evolyutsiyasini aniqroq tushunishga imkon beradi.

Hénonning 1974-yildagi ishi Toda panjarasi uchun saqlanuvchi integrallarning aniq to‘plamini berdi [4]. Flaschkaning 1974-yildagi ishlari bu integrallarning mavjudligini boshqa usul bilan asoslash, Toda panjarasini KdV tenglamasining chekli o‘lchamli analogi sifatida ko‘rish va inverse-scattering usuliga o'tish uchun nazariy asos yaratdi [5; 6]. Moser esa 1975-yilda Toda tizimini izospektral deformatsiyalar bilan bog‘lab, uning integrallanuvchi Hamilton tizimi sifatidagi geometrik-spectral talqinini rivojlantirdi [7].

Demak, bu uchta olimning natijalarini bitta ilmiy jarayonning turli bosqichlari sifatida ifodalash mumkin:

Toda modeli→Henon: integrallar→Flaschka: integrallanuvchanlik va inverse scattering→Moser: izospekt

Bu ketma-ketlik Toda panjarasining oddiy nochiziqli mexanik modeldan zamonaviy integrallanuvchi tizimga aylanishini tushuntirishda maqolaning eng muhim tarixiy-matematik yadrosini tashkil etadi.

Lax formalizmi va Toda panjarasining spektral tabiati

Toda panjarasining keyingi matematik talqinida Lax formalizmi muhim o‘rin egallaydi. Umumiy Lax tenglamasi

$$\frac{dL}{dt}=[B,L]$$

ko‘rinishida ifodalanadi. Bu yerda L — tizimning spektral ma’lumotini saqlovchi operator yoki matritsa, Besa tegishli evolyutsiya operatoridir.

Toda panjarasining Flaschka o‘zgaruvchilaridagi matritsali tasviri uchdiagonal Jacobi matritsasi bilan bog‘liq. Tizim evolyutsiyasini bunday shaklda ifodalash uning spektrining saqlanishini tushuntirishga imkon beradi. Shu nuqtadan Toda panjarasining saqlanuvchi integrallari matritsaning spektral invariantlari bilan bog‘lanadi.

Bu yondashuv Toda panjarasining ilmiy tarixida muhim metodologik burilishni ifodalaydi. Dastlab zarrachalarning koordinatalari va tezliklari orqali ifodalangan fizik tizim endi operatorlar va matritsalar evolyutsiyasi orqali ham tavsiflanadi. Natijada klassik mexanika, spektral nazariya va integrallanuvchi tizimlar nazariyasi yagona matematik model doirasida birlashadi.

Toda tenglamasining keyingi rivojlanishi

Toda modelining keyingi rivojlanishi 1970-yillar bilan cheklanib qolmadi. Inverse-scattering usullarining rivojlanishi, algebro-geometrik yechimlar, davriy Toda panjaralari, relativistik Toda sistemalari va diskret Toda tenglamalarining o‘rganilishi ushbu modelning katta matematik oilaga aylanishiga olib keldi.

Toda tomonidan yozilgan *Theory of Nonlinear Lattices* monografiyasi modelning rivojlangan nazariyasini tizimli ravishda umumlashtiradi [10]. Unda eksponensial o‘zaro ta’sirli panjaralar, spektr va yechimlarni qurish, davriy sistemalar hamda nochiziqli panjaralar nazariyasining keyingi yo‘nalishlari yoritilgan.

Zamonaviy sharhlarda ham Toda panjarasi hali ham faol matematik tadqiqot obyekti ekanligi ko‘rsatiladi. Masalan, keyingi tadqiqotlarda Flaschka tomonidan kiritilgan matritsali yondashuv, simmetrik Toda oqimi va uning geometrik xususiyatlari qayta ko‘rib chiqilmoqda [11]. Demak, Toda tenglamasi tarixiy ahamiyatga ega bo‘lgan “eski model” emas, balki zamonaviy integrallanuvchi tizimlar, geometrik oqimlar va matematik fizika uchun faol tadqiqot maydoni bo‘lib qolmoqda.

Xulosa

Toda tenglamasining shakllanishi va rivojlanish tarixi bir matematik modelning turli ilmiy yo‘nalishlar kesishmasida qanday chuqurlashib borishini ko‘rsatadi. 1967-yilda Morikazu Toda tomonidan nochiziqli o‘zaro ta’sirlashuvchi zarrachalar zanjiri uchun taklif etilgan model dastlab tebranish va to‘lqin tarqalishini tushuntirishga qaratilgan fizik-matematik tizim edi [1; 2]. 1970-yilga kelib uning solitary-wave va soliton xususiyatlari chuqurroq o‘rganildi [3].

1974-yil Toda panjarasi tarixidagi hal qiluvchi bosqich bo‘ldi. Michel Hénon saqlanuvchi integrallarning aniq to‘plamini aniqladi [4]. Hermann Flaschka esa integrallarning mavjudligini mustaqil usul bilan asoslab, Toda panjarasini KdV tenglamasining chekli o‘lchamli analogi sifatida ko‘rsatdi va inverse-scattering yondashuviga

nazariy asos yaratdi [5; 6]. 1975-yilda Jürgen Moser Toda tipidagi integrallanuvchi Hamilton tizimlarini izospektral deformatsiyalar bilan bog‘lab, modelning spektral va geometrik tabiatini yanada chuqurroq ochib berdi [7].

Shu asosda Toda tenglamasining ilmiy evolyutsiyasini quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalash mumkin:

nochiziqli panjara→anharmonik to‘lqin→
soliton→saqlanuvchi integrallar→
integrallanuvchi tizim→izospektral dinamika

Mazkur evolyutsiya Toda tenglamasining nafaqat nochiziqli mexanikadagi, balki matematik fizika, spektral nazariya va integrallanuvchi dinamik tizimlar nazariyasidagi fundamental ahamiyatini belgilaydi. Ayniqsa, Hénon–Flaschka–Moser bosqichi Toda modelining fizik muammodan chuqur matematik nazariyaga aylanishida markaziy o‘rin tutadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Toda, M. (1967). Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction. *Journal of the Physical Society of Japan, 22*(2), 431–436. DOI: 10.1143/JPSJ.22.431.
2. Toda, M. (1967). Wave Propagation in Anharmonic Lattices. *Journal of the Physical Society of Japan, 23*(3), 501–506. DOI: 10.1143/JPSJ.23.501.
3. Toda, M. (1970). Waves in Nonlinear Lattice. *Progress of Theoretical Physics Supplement, 45*, 174–200. DOI: 10.1143/PTPS.45.174.
4. Hénon, M. (1974). Integrals of the Toda lattice. *Physical Review B, 9*(4), 1921–1923. DOI: 10.1103/PhysRevB.9.1921.
5. Flaschka, H. (1974). The Toda lattice. II. Existence of integrals. *Physical Review B, 9*(4), 1924–1925. DOI: 10.1103/PhysRevB.9.1924.
6. Flaschka, H. (1974). On the Toda lattice. II: Inverse-scattering solution. *Progress of Theoretical Physics, 51*(3), 703–716. DOI: 10.1143/PTP.51.703.
7. Moser, J. (1975). Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. *Advances in Mathematics, 16*(2), 197–220. DOI: 10.1016/0001-8708(75)90151-6.
8. Tomei, C. (2013). The Toda lattice, old and new. *Journal of Geometry and Mechanics, 5*(4), 511–530. DOI: 10.3934/jgm.2013.5.511.
9. Moser, J. (1975). Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential—An integrable system. In *Dynamical Systems, Theory and Applications*, Lecture Notes in Physics, 38, 467–497. Springer.
10. Toda, M. (1989). *Theory of Nonlinear Lattices* (2nd ed.). Springer, Solid-State Sciences, Vol. 20. DOI: 10.1007/978-3-642-83219-2.
11. Bloch, A. M., & Karp, S. N. (2023). Symmetric Toda, gradient flows, and tridiagonalization. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 455, 133766. DOI: 10.1016/j.physd.2023.133766.