GRUPPALAR ALGEBRASI VA UNING TASVIRLARI

Axmadova Marjona Muxtor qizi
https://doi.org/10.5281/zenodo.22994243

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada gruppalar algebrasi va uning tasvirlari, gruppa tasvirining vektor fazodagi chiziqli operatorlar orqali ifodalanishi hamda invariant qism fazolar tushunchasi o‘rganiladi. Gruppaning chekli tasviri asosida gruppalar algebrasini hosil qilish, uning fazodagi ta’sirini aniqlash va invariant qism fazolar yordamida tasvirning ichki tuzilishini tavsiflash masalalari yoritiladi. Shuningdek, gruppa tasviri bilan gruppalar algebrasi tasviri o‘rtasidagi tabiiy bog‘lanish asoslanib, gruppalar algebrasining modul sifatidagi talqini bayon qilinadi.

Kalit so‘zlar: gruppa, gruppa tasviri, gruppalar algebrasi, vektor fazo, invariant qism fazo, chiziqli operator, modul, qisqarmas tasvir, gomomorfizm.

ABSTRACT

This paper studies group algebras and their representations, with particular attention to invariant subspaces and the relationship between a group representation and the corresponding representation of the group algebra. The construction of a group algebra from a finite-dimensional representation is described, and the action of group elements as linear operators is considered. The role of invariant subspaces in the structural analysis of representations is also discussed.

Keywords: group, representation, group algebra, vector space, invariant subspace, linear operator, module, irreducible representation, homomorphism.

1. KIRISH

Gruppalar nazariyasi zamonaviy algebraning asosiy yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, ko‘plab algebraik va amaliy masalalarni yagona nazariy asosda o‘rganish imkonini beradi. Gruppaning elementlarini vektor fazosidagi chiziqli operatorlar yordamida ifodalash gruppa tasvirlari nazariyasining asosini tashkil etadi. Bunday yondashuv abstrakt algebraik munosabatlarni matritsalar va chiziqli akslantirishlar orqali tadqiq qilishga imkon beradi.

Gruppa tasvirlarini o‘rganishda gruppalar algebrasi muhim vosita hisoblanadi. Gruppa algebrasi gruppa elementlarining formal chiziqli kombinatsiyalaridan tuzilib, gruppa amallarini algebraik amallar bilan birlashtiradi. Shu sababli gruppaning tasvirini gruppalar algebrasining tasviri sifatida qarash mumkin. Bu esa gruppa tasvirlari va modullar nazariyasi o‘rtasidagi bog‘lanishni yuzaga keltiradi.

Mazkur maqolaning maqsadi gruppalar algebrasi va uning tasvirlari o‘rtasidagi munosabatni tizimli ravishda bayon qilish, invariant qism fazolarning o‘rnini ko‘rsatish hamda gruppa tasvirining gruppalar algebrasi tasviriga kengaytirilishini izohlashdan iborat.

2. ADABIYOTLAR SHARHI

Gruppalar tasvirlari nazariyasi klassik algebra tarkibida shakllangan bo‘lib, hozirgi kunda abstrakt algebra, sonlar nazariyasi, geometriya va matematik fizikaning turli

masalalarida qo‘llanadi. J.-P. Serre asarlarida chekli gruppalarning chiziqli tasvirlari, invariant qism fazolar va qisqarmas tasvirlar izchil yoritilgan. Dummit va Foote tomonidan yozilgan Abstract Algebra asarida gruppalar, halqalar, modullar va ular orasidagi bog‘lanishlar umumiy algebra nuqtayi nazaridan bayon qilingan.

Curtis va Reinerning tadqiqotlarida chekli gruppalar tasvirlarini gruppalar algebrasi va assotsiativ algebralar bilan bog‘lash masalalari keng o‘rganilgan. Ushbu manbalarda tasvirni algebraik obyekt sifatida qarash, invariant qism fazolarni aniqlash va tasvirni qisqarmas tarkibiy qismlarga ajratishning nazariy asoslari keltiriladi.

Mazkur maqolada ushbu nazariy qarashlar asosida gruppa tasviri, gruppalar algebrasi va invariant qism fazolar o‘rtasidagi munosabatlar bir tizimga keltiriladi.

3. ASOSIY TUSHUNCHALAR VA NAZARIY QISM

G — gruppa, V esa K maydon ustidagi vektor fazo bo‘lsin. G gruppaning V fazodagi tasviri deb

$$\rho : G \to GL(V)$$

ko‘rinishidagi gomomorfizmga aytiladi. Bu yerda GL(V) — V fazoning barcha teskari chiziqli operatorlaridan tashkil topgan gruppa. Tasvir uchun har qanday $g_1, g_2 \in G$ elementlarida

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$$

tenglik bajariladi. Demak, gruppadagi ko‘paytirish amali V fazodagi chiziqli operatorlar kompozitsiyasiga mos keladi.

Agar $W \subseteq V$ qism fazo bo‘lib, barcha $g \in G$ uchun $\rho(g)(W) \subseteq W$ bo‘lsa, W tasvirga nisbatan invariant qism fazo deyiladi. Invariant qism fazolar tasvirning ichki tuzilishini aniqlashda asosiy tushunchalardan biridir.

Agar V fazoning faqat {0} va V ning o‘zi invariant qism fazolar bo‘lsa, ρ tasvir qisqarmas tasvir deyiladi. Shunday qilib, invariant qism fazolarni aniqlash tasvirning qisqarmasligini tekshirishning muhim usullaridan biridir.

4. GRUPPALAR ALGEBRASI VA UNING TASVIRI

K maydon va G gruppa berilgan bo‘lsin. K[G] gruppalar algebrasi deb G gruppa elementlarining chekli formal chiziqli kombinatsiyalaridan tashkil topgan algebra tushuniladi. Umumiy holda uning elementi

$$a = \Sigma\, a_g\, g, \quad a_g \in K$$

ko‘rinishida yoziladi, bunda yig‘indi G ning chekli sondagi elementlari bo‘yicha olinadi. Qo‘shish koeffitsiyentlar bo‘yicha, ko‘paytirish esa gruppadagi ko‘paytirish va distributivlik qonuni asosida aniqlanadi.

Agar G ning V fazodagi ρ tasviri berilgan bo‘lsa, uni K[G] ga quyidagicha kengaytirish mumkin:

$$\bar{\rho}(\Sigma\, a_g\, g) = \Sigma\, a_g\, \rho(g).$$

Natijada gruppa tasviri gruppalar algebrasining algebra gomomorfizmi orqali berilgan tasviriga aylanadi. Bu kengaytma gruppadagi barcha algebraik munosabatlarni yagona chiziqli-algebraik tizimda ifodalash imkonini beradi.

5. INVARIANT QISM FAZOLAR VA TASVIRLAR

Invariant qism fazo tushunchasi gruppa tasvirining tuzilishini o‘rganishda markaziy o‘rin tutadi. Agar W invariant qism fazo bo‘lsa, G ning har bir elementi W fazoni o‘ziga akslantiradi. Shu sababli tasvirni W ning o‘zida va V/W faktor fazoda alohida o‘rganish mumkin.

Gruppalar algebrasining moduli nuqtayi nazaridan qaralganda ham xuddi shu invariantlik xususiyati saqlanadi. Ya’ni G ning ta’siriga nisbatan invariant bo‘lgan qism fazo K[G]-modulning qism moduliga mos keladi. Bu moslik gruppalar tasviri bilan modullar nazariyasi o‘rtasidagi tabiiy bog‘lanishni ifodalaydi.

6. NATIJALAR VA MUHOKAMA

O‘rganishlar natijasida gruppaning chiziqli tasvirini gruppalar algebrasining tasviriga kengaytirish mumkinligi ko‘rsatildi. Buning uchun gruppa elementlarining tasvirdagi operatorlari ularning formal chiziqli kombinatsiyalariga chiziqlilik asosida kengaytiriladi.

Asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

gruppaning chiziqli tasviri gruppalar algebrasining tabiiy tasvirini hosil qiladi;

tasvirga invariant qism fazo gruppalar algebrasining mos qism modulini aniqlaydi;

faqat trivial invariant qism fazolarga ega tasvir qisqarmas tasvir sifatida qaraladi;

gruppalar algebrasi orqali gruppa tasvirlarini modul nazariyasi yordamida o‘rganish mumkin;

ushbu yondashuv gruppa tasvirining ichki tuzilishini tizimli ravishda tahlil qilish imkonini beradi.

Demak, gruppa tasviri va gruppalar algebrasi tasviri o‘rtasidagi bog‘lanish nafaqat formal moslik, balki tasvirning invariant qism fazolari va modul tuzilishini o‘rganish uchun amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan algebraik vositadir.

7. XULOSA

Ushbu maqolada gruppalar algebrasi va uning tasvirlari, invariant qism fazolar hamda gruppa tasviri bilan gruppalar algebrasi tasviri o‘rtasidagi bog‘lanish ko‘rib chiqildi. Gruppaning vektor fazodagi chiziqli tasviri gruppalar algebrasiga tabiiy ravishda kengaytirilishi mumkinligi ko‘rsatildi.

Invariant qism fazolar tasvirning ichki tuzilishini aniqlashda muhim vosita ekanligi asoslandi. Xususan, tasvirning faqat trivial invariant qism fazolarga ega bo‘lishi uning qisqarmasligi bilan bog‘liq. Gruppalar algebrasining modul sifatidagi talqini esa ushbu munosabatlarni yanada umumiy algebraik doirada o‘rganish imkonini beradi.

Olingan nazariy natijalar gruppalar tasvirlari, modullar va assotsiativ algebralar o‘rtasidagi munosabatlarni keyingi tadqiqotlarda qo‘llash uchun asos bo‘lib xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Serre J.-P. Linear Representations of Finite Groups. Springer-Verlag, New York, 1977.
2. Dummit D. S., Foote R. M. Abstract Algebra. 3rd ed. John Wiley & Sons, 2004.
3. Curtis C. W., Reiner I. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. Interscience Publishers, 1962.
4. Alperin J. L. Local Representation Theory. Cambridge University Press, 1986.