TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAKLI PLASTINKANING DEFORMATSIYALANISHINI SONLI YECHISH

Eshonqulov Adham Botir o‘g‘li
O‘zbekiston Milliy Universiteti tadqiqotchisi
E-mail: esonkulovadham557@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.23230415

Annotatsiya. Ushbu maqolada tashqi yuk ta’sirida to‘g‘ri to‘rtburchakli yupqa plastinkaning deformatsiyalanish jarayonini matematik modellashtirish va sonli yechish masalasi ko‘rib chiqiladi. Plastinkaning egilish deformatsiyasi klassik yupqa plastinka nazariyasi asosida tavsiflanib, uning ko‘ndalang siljishi to‘rtinchi tartibli differensial tenglama orqali ifodalanadi. Masalani sonli yechish uchun fazoviy soha chekli ayirmalar to‘riga ajratiladi va hosil bo‘lgan differensial tenglama algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Plastinkaning geometrik va fizik parametrlari, tashqi yuk, tayanch shartlari hamda elastiklik xususiyatlari hisobga olinadi. Sonli algoritm yordamida plastinkaning ko‘ndalang siljishi, egilish momentlari va kuchlanishlarini aniqlash imkoniyati ko‘rsatiladi. Taklif etilgan yondashuv qurilish konstruksiyalari, mashinasozlik detallari, yupqa metall elementlar va kompozit plastinkalarning deformatsion holatini tadqiq qilishda qo‘llanishi mumkin.
Kalit so‘zlar: to‘g‘ri to‘rtburchakli plastinka, deformatsiya, egilish, ko‘ndalang siljish, elastiklik, sonli yechim, chekli ayirmalar usuli, plastinka nazariyasi, egilish momenti, kuchlanish, matematik modellashtirish.

Abstract. This paper considers the mathematical modeling and numerical solution of the deformation of a rectangular thin plate subjected to external loading. The bending deformation is described within the classical thin plate theory, where the transverse displacement is governed by a fourth-order differential equation. For the numerical solution, the spatial domain is discretized using a finite-difference grid, and the governing differential equation is transformed into a system of algebraic equations. Geometric and material properties, external loading, and boundary conditions are taken into account. The numerical algorithm allows the transverse displacement, bending moments, and stresses of the plate to be determined. The proposed approach can be applied to the analysis of structural elements, machine components, thin metal plates, and composite plate structures.
Keywords: rectangular plate, deformation, bending, transverse displacement, elasticity, numerical solution, finite difference method, plate theory, bending moment, stress, mathematical modeling.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы математического моделирования и численного решения задачи о деформировании тонкой прямоугольной пластины под действием внешней нагрузки. Изгибная деформация пластины описывается на основе классической теории тонких пластин, при этом поперечное перемещение выражается через дифференциальное уравнение четвертого порядка. Для численного решения задачи область пластины дискретизируется с помощью конечно-разностной сетки, а

полученное дифференциальное уравнение преобразуется в систему алгебраических уравнений. Учитываются геометрические и физические параметры пластины, внешняя нагрузка, граничные условия и упругие свойства материала. В работе показана возможность определения поперечных перемещений, изгибающих моментов и напряжений в пластине с использованием численного алгоритма. Предложенный подход может быть применен для исследования напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов, деталей машин, тонких металлических элементов и композитных пластин.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, деформация, изгиб, поперечное перемещение, упругость, численное решение, метод конечных разностей, теория пластин, изгибающий момент, напряжение, математическое моделирование.

Kirish. Plastinkalar qurilish, mashinasozlik, aviatsiya, energetika va boshqa muhandislik sohalarida keng qo‘llaniladigan konstruktiv elementlardan biridir. Tashqi kuch, bosim yoki taqsimlangan yuk ta’sirida plastinkada egilish, siljish va kuchlanishlar yuzaga keladi. Shu sababli plastinkaning deformatsion holatini oldindan aniqlash konstruksiyaning mustahkamligi va ekspluatatsion ishonchliligini baholashda muhim ahamiyatga ega.

To‘g‘ri to‘rtburchakli plastinka uchun analitik yechim ayrim sodda chegaraviy shartlarda olinishi mumkin. Biroq real muhandislik masalalarida plastinkaning barcha tomonlari bir xil tayanchlangan bo‘lmasligi, yuklanishning notekis taqsimlanishi, geometrik parametrlarning murakkabligi va material xossalarining o‘zgarishi sababli analitik yechim olish qiyinlashadi.

Bunday masalalarni yechishda sonli usullar samarali vosita hisoblanadi. Xususan, chekli ayirmalar usuli, chekli elementlar usuli va chekli hajmlar usuli yordamida plastinkaning deformatsion holatini hisoblash mumkin. Ushbu ishda to‘g‘ri to‘rtburchakli yupqa plastinkaning egilishi klassik Kirxgof–Lyav plastinka modeli asosida qaraladi va sonli yechim chekli ayirmalar usuli orqali shakllantiriladi.

Tadqiqotning asosiy maqsadi — tashqi taqsimlangan yuk ta’sirida to‘g‘ri to‘rtburchakli plastinkaning deformatsiyasini matematik modellashtirish va sonli algoritm yordamida aniqlash.

Ushbu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalar belgilandi:

1. Plastinkaning geometrik va fizik modelini shakllantirish.
2. Plastinka egilishining differensial tenglamasini keltirib chiqarish.
3. Boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni aniqlash.
4. Differensial tenglamani chekli ayirmalar orqali diskretlashtirish.
5. Algebraik tenglamalar sistemasini shakllantirish.
6. Plastinkaning ko‘ndalang siljishini aniqlash.
7. Egilish momentlari va kuchlanishlarni hisoblash.
8. Sonli algoritmning aniqligi va barqarorligini baholash.

Odatda eng katta ko‘ndalang siljish plastinkaning markaziy qismida yoki yuklanishning maksimal qiymatiga mos sohada yuzaga keladi. Biroq deformatsiyaning aniq joylashuvi tayanch shartlari va yukning taqsimlanishiga bog‘liq.

Adabiyotlar tahlili. To‘g‘ri to‘rtburchakli plastinkalarning deformatsiyalanishini matematik modellashtirish masalasi elastiklik nazariyasi va matematik fizikaning muhim yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Plastinkalarning egilishi, kuchlanish-deformatsiya holati va

barqarorligini aniqlash bo‘yicha dastlabki nazariy asoslar klassik yupqa plastinka nazariyasining shakllanishi bilan bog‘liq. Mazkur nazariya doirasida plastinkaning ko‘ndalang siljishi to‘rtinchi tartibli differensial tenglama, ya’ni bi-garmonik tenglama orqali ifodalanadi. Keyinchalik ushbu model turli chegaraviy shartlar, yuklanish turlari va material xususiyatlarini hisobga olgan holda takomillashtirildi.

Timoshenko va Woinowsky-Kriegerning plastinkalar va qobiqlar nazariyasiga bag‘ishlangan fundamental ishlarida yupqa plastinkalarning egilish masalalari tizimli ravishda bayon qilingan. Ushbu yondashuvda plastinka deformatsiyasi Kirxgof gipotezalari asosida qaraladi va izotrop elastik material uchun boshqaruvchi tenglama

Plastinka masalalarini sonli yechishda chekli ayirmalar usuli alohida o‘rin egallaydi. Mazkur usulning asosiy g‘oyasi uzluksiz differensial tenglamadagi hosilalarni diskret tugunlardagi chekli ayirmalar bilan almashtirishdan iborat. Natijada plastinkaning uzluksiz deformatsiya maydoni chekli sondagi noma’lumlar orqali ifodalanadigan algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Ayniqsa to‘g‘ri to‘rtburchakli muntazam sohalarda chekli ayirmalar usuli hisoblash algoritmini nisbatan sodda shakllantirish imkonini beradi.

Plastinkalar egilishining bi-garmonik tenglamasini chekli ayirmalar yordamida yechishga qaratilgan dastlabki tadqiqotlarda turli diskretlashtirish sxemalari va iteratsion yechish algoritmlari ishlab chiqilgan. Ehrlich va Gupta to‘g‘ri to‘rtburchakli sohada bi-garmonik tenglama uchun chekli ayirmalar sxemalarini ko‘rib chiqib, hosil bo‘ladigan algebraik sistemani iteratsion usullar bilan yechish masalasini tadqiq qilgan. Mualliflar iteratsiyaning yaqinlashish tezligi tanlangan chekli ayirmalar sxemasiga bog‘liqligini ko‘rsatgan. Bu natija plastinka deformatsiyasini sonli hisoblashda nafaqat diskretlashtirish, balki algebraik sistemani yechish strategiyasini ham hisobga olish zarurligini ko‘rsatadi.

Reddy va Gera tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda yupqa to‘g‘ri to‘rtburchakli elastik plastinkalarning egilishini chekli ayirmalar yordamida hisoblashning takomillashtirilgan formulasi taklif etilgan. Ushbu yondashuvning muhim jihati shundaki, faqat ko‘ndalang siljishni emas, balki egilish momentlarini ham aniqroq hisoblashga e’tibor qaratilgan. Mualliflar plastinkaning bi-garmonik tenglamasini deformatsiya–moment munosabatlari va muvozanat tenglamalari bilan almashtirib, izotrop hamda ortotrop plastinkalar uchun turli yuklanish va chegaraviy shartlarni tekshirgan. Ushbu ish plastinkaning deformatsiyasi bilan bir qatorda uning kuchlanish-deformatsiya holatini ham sonli tahlil qilish zarurligini ko‘rsatadi.

Salonen ishida to‘g‘ri to‘rtburchakli plastinka uchun chekli ayirmalar usuli va chekli elementlar usuli o‘rtasidagi bog‘liqlik tadqiq qilingan. Muallif plastinka elementi qattiqlik matritsasini chekli ayirmali ifodalar orqali shakllantirish imkoniyatini ko‘rsatgan. Mazkur natijalar plastinkaning sonli modelini qurishda turli diskretlashtirish yondashuvlari o‘rtasidagi umumiylik mavjudligini ko‘rsatadi. Shu sababli chekli ayirmalar usulida olingan natijalarni chekli elementlar asosidagi hisoblashlar bilan taqqoslash orqali modelning ishonchliligini tekshirish mumkin.

Plastinkaning geometriyasi murakkablashgan sari muntazam chekli ayirmalar to‘ridan foydalanish qiyinlashadi. Shu sababli notekis yoki ixtiyoriy shakldagi sohalar uchun maxsus sonli sxemalar ishlab chiqilgan. Ben-Artzi va hammualliflar bi-garmonik tenglamani ixtiyoriy tekislik sohalarida yechish uchun kompakt chekli ayirmalar sxemasini taklif qilgan. Ushbu yondashuvda hisoblash sohasi Dekart to‘riga joylashtiriladi va maxsus interpolyatsiya

polinomlari yordamida bi-garmonik operator approksimatsiya qilinadi. Tadqiqotda muntazam to‘r uchun yuqori tartibli aniqlikka erishish imkoniyati ham ko‘rsatilgan.

Plastinka egilishi masalasida qutbiy koordinatalardan foydalanishga asoslangan chekli ayirmalar yondashuvi ham ishlab chiqilgan. Bunday usul, ayniqsa, aylana yoki sektor shaklidagi plastinkalar uchun qulay bo‘lib, hisoblash to‘rini geometrik chegaraga moslashtirish imkonini beradi. Tadqiqotlarda turli chegaraviy shartlarga ega plastinkalar uchun sonli natijalar analitik yechimlar bilan taqqoslangan. Bu esa sonli usulni analitik natijalar mavjud bo‘lgan maxsus holatlar orqali verifikatsiya qilish muhimligini ko‘rsatadi.

Plastinka qalinligini optimallashtirish bo‘yicha tadqiqotlarda ham chekli ayirmalar usulidan foydalanilgan. Agyei-Agyemang va Akangah bi-garmonik tenglama asosida plastinka deformatsiyasi va kuchlanishlarini hisoblab, plastinka qalinligini optimallashtirish masalasini o‘rgangan. Mualliflar MATLAB dasturi asosida chekli ayirmalar hisoblashlarini amalga oshirib, olingan natijalarni ANSYS chekli elementlar hisoblari bilan taqqoslagan. Natijalar chekli ayirmalar usuli oddiy muhandislik masalalarida deformatsiya va konstruktiv parametrlarni baholash uchun samarali vosita bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatgan.

Adabiyotlar tahlili shuni ko‘rsatadiki, to‘g‘ri to‘rtburchakli plastinkaning deformatsiyasini sonli yechishda uchta asosiy yo‘nalish shakllangan. Birinchi yo‘nalish — klassik Kirxgof plastinka nazariyasi asosida matematik modelni shakllantirish; ikkinchi yo‘nalish — bi-garmonik tenglamani chekli ayirmalar yordamida diskretlashtirish; uchinchi yo‘nalish esa hosil bo‘lgan algebraik tenglamalar sistemasini yuqori samarali iteratsion yoki to‘g‘ridan-to‘g‘ri usullar yordamida yechishdan iborat.

Shu bilan birga, mavjud tadqiqotlarda ayrim masalalar yetarlicha kompleks tarzda birlashtirilmagan. Jumladan, to‘g‘ri to‘rtburchakli plastinka uchun deformatsiya, egilish momentlari va kuchlanishlarni yagona chekli ayirmalar algoritmida hisoblash; hisoblash to‘rining zichligi natijaga ta’sirini baholash; sonli natijalarni analitik yoki chekli elementlar yechimlari bilan verifikatsiya qilish hamda hisoblash parametrlarini optimallashtirish dolzarb masalalar bo‘lib qolmoqda.

Shu nuqtayi nazardan, mazkur tadqiqotda to‘g‘ri to‘rtburchakli plastinkaning deformatsiyalanishini bi-garmonik tenglama asosida modellashtirish, uni chekli ayirmalar yordamida diskretlashtirish, hosil bo‘lgan algebraik tenglamalar sistemasini sonli yechish va natijada ko‘ndalang siljish, egilish momentlari hamda kuchlanishlarni aniqlashga yo‘naltirilgan kompleks yondashuv taklif etiladi. Bunday yondashuv mavjud nazariy va sonli ishlanmalarni yagona hisoblash algoritmida birlashtirishga xizmat qiladi.

Sonli usulning afzalliklari va cheklovlari. Chekli ayirmalar usulining asosiy afzalliklari:

- matematik algoritmining nisbatan soddaligi;
- dasturlashning qulayligi;
- muntazam geometrik sohalarda yuqori samaradorlik;
- deformatsiya maydonini to‘liq olish imkoniyati;
- turli yuklanishlarni modellashtirish imkoniyati.

Biroq quyidagi cheklovlar mavjud:

- murakkab geometriyalarda to‘r yaratish qiyin;
- to‘rtinchi tartibli tenglama sababli chegaraviy shartlarni to‘g‘ri kiritish talab etiladi;
- murakkab tayanchlarda maxsus diskretlashtirish zarur;

- katta hisoblash to‘rlarida algebraik sistema hajmi sezilarli ortadi.

Murakkab konstruksiyalar uchun chekli elementlar usuli ko‘pincha qulayroq bo‘ladi.

Plastinkaning deformatsiyasini hisoblash Python, MATLAB yoki boshqa ilmiy hisoblash muhitlarida amalga oshirilishi mumkin.

Amaliy ahamiyati. To‘g‘ri to‘rtburchakli plastinkaning deformatsiyasini sonli hisoblash quyidagi masalalarda qo‘llanishi mumkin:

- metall listlarning deformatsiyasini aniqlash;
- temir-beton va metall konstruksiyalarni tahlil qilish;
- mashina va mexanizmlar korpuslarini hisoblash;
- samolyot va kosmik apparatlarning yupqa konstruktiv elementlarini modellashtirish;
- bosim ostidagi plastinalarni tahlil qilish;
- issiqlik ta’sirida deformatsiyalanadigan plastinkalarni hisoblash;
- kompozit materiallardan tayyorlangan konstruksiyalarni tadqiq qilish;
- konstruksiya parametrlarini optimallashtirish.

Tadqiqot muhokamasi. Plastinkaning deformatsiyalanishi to‘rtinchi tartibli differensial tenglama bilan tavsiflanishi sababli ushbu masala oddiy ikkinchi tartibli elastiklik masalalariga nisbatan murakkabroq hisoblanadi. Ayniqsa, chegaraviy shartlarning to‘g‘ri ifodalanishi sonli yechimning fizik mazmuniga bevosita ta’sir ko‘rsatadi.

Tadqiqotning amaliy-uslubiy yangiligi quyidagilarda namoyon bo‘ladi:

1. To‘g‘ri to‘rtburchakli plastinkaning deformatsiyalanish jarayoni yagona sonli model doirasida ifodalanadi.
2. To‘rtinchi tartibli plastinka tenglamasi chekli ayirmalar yordamida algebraik sistema ko‘rinishiga keltiriladi.
3. Deformatsiya bilan bir qatorda egilish momentlari va kuchlanishlarni aniqlash imkoniyati yaratiladi.
4. Hisoblash to‘rini zichlashtirish orqali sonli yechimning yaqinlashishini baholash mexanizmi taklif qilinadi.
5. Model keyinchalik o‘zgaruvchan yuk, murakkab tayanch va nochiziqli material xususiyatlariga moslashtirilishi mumkin.

Xulosa. Ushbu maqolada to‘g‘ri to‘rtburchakli yupqa plastinkaning tashqi yuk ta’sirida deformatsiyalanishini sonli hisoblash masalasi ko‘rib chiqildi. Plastinkaning ko‘ndalang siljishi klassik yupqa plastinka nazariyasi asosida to‘rtinchi tartibli bi-Laplas differensial tenglama orqali ifodalandi.

Sonli yechim orqali plastinkaning istalgan nuqtasidagi ko‘ndalang siljish, maksimal deformatsiya, egilish momentlari va normal kuchlanishlarni aniqlash mumkin. Hisoblash to‘rini zichlashtirish esa natijalarning yaqinlashishi va sonli aniqligini nazorat qilish imkonini beradi. Mazkur matematik model muntazam geometrik shaklga ega bo‘lgan plastinkalarni hisoblash uchun samarali bo‘lib, kelgusida uni murakkab chegaraviy shartlar, o‘zgaruvchan qalinlik, ortotrop material, geometrik nochiziqlik, katta deformatsiyalar va dinamik yuklanishlarni hisobga olgan holda rivojlantirish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill.
2. Szilard R. Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods. Prentice Hall.
3. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. CRC Press.
4. Leissa A.W. Vibration of Plates. NASA SP-160.
5. Bathe K.J. Finite Element Procedures. Prentice Hall.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Elsevier.
7. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill.
8. Ugural A.C. Stresses in Plates and Shells. McGraw-Hill.
9. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of Elasticity. Butterworth-Heinemann.
10. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford University Press.