FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI

Iminova Shaxloxon Ixvoljon qizi
https://doi.org/10.5281/zenodo.23374834

Annotatsiya. Ushbu maqolada matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan funksiya limiti va uzluksizligi masalalari yoritilgan. Funksiya limitining mazmuni, uning matematik ta’rifi, bir tomonlama limitlar, limitlarni hisoblash qoidalari hamda funksiyaning nuqtada va oraliqda uzluksizligi bayon etilgan. Shuningdek, uzluksizlikning asosiy xossalari, uzilish nuqtalarining turlari va mavzuga oid misollar tahlil qilingan. Mazkur tushunchalarning hosila, integral va amaliy masalalarni yechishdagi ahamiyati ko‘rsatib berilgan.

Kalit so‘zlar: funksiya, limit, uzluksizlik, matematik analiz, bir tomonlama limit, uzilish nuqtasi, limit teoremalari, uzluksiz funksiya.

KIRISH

Matematika fanining muhim yo‘nalishlaridan biri matematik analiz bo‘lib, u o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiyalar va ularning xususiyatlarini o‘rganadi. Matematik analizning asosiy tushunchalari qatoriga funksiya limiti va uzluksizligi kiradi. Ushbu tushunchalar yordamida funksiyaning ma’lum bir nuqta atrofidagi holatini, o‘zgarish qonuniyatlarini va grafik xususiyatlarini chuqur o‘rganish mumkin.

Funksiya limiti tushunchasi hosila va integral kabi muhim matematik amallarning nazariy asosini tashkil etadi. Masalan, hosila funksiyaning o‘zgarish tezligini ifodalasa, integral turli miqdorlarni jamlash va egri chiziq bilan chegaralangan yuzalarni hisoblash imkonini beradi. Bu amallarning matematik asoslanishida limit tushunchasi muhim o‘rin tutadi.

Uzluksizlik esa funksiyaning argument o‘zgarishiga nisbatan qanday munosabatda bo‘lishini tavsiflaydi. Uzluksiz funksiya ma’lum nuqtada keskin uzilish yoki sakrashga ega bo‘lmaydi. Ushbu xususiyatlar fizika, iqtisodiyot, muhandislik, informatika va boshqa fanlarda uchraydigan jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo‘llaniladi.

Maqolaning maqsadi funksiya limiti va uzluksizligi tushunchalarining nazariy mazmunini ochib berish, asosiy teoremalarni bayon qilish hamda ularni misollar orqali tushuntirishdan iborat.

Funksiya limiti tushunchasi va uning ta’rifi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lib, x o‘zgaruvchi a soniga yaqinlashsin. Bunda funksiya qiymatlari ham ma’lum bir L soniga yaqinlashishi mumkin. Agar x ning a ga yaqin qiymatlariga mos $f(x)$ qiymatlari L ga istalgan darajada yaqinlashsa, L soni funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Bu holat quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Mazkur yozuv x argument a ga yaqinlashganda $f(x)$ funksiyaning L ga yaqinlashishini bildiradi. Bunda $x = a$ bo‘lgandagi funksiyaning qiymati limitni aniqlash uchun majburiy

ravishda mavjud bo‘lishi shart emas. Muhimi, funksiya a nuqta atrofida qanday qiymatlar qabul qilishidir.

Funksiya limitining aniq matematik ta’rifi epsilon-delta ta’rifi orqali ifodalanadi. Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lsaki,

$$0 < |x - a| < \delta$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

deb aytiladi.

Bu ta’rif limit tushunchasining qat’iy matematik asosini tashkil qiladi. Uning mazmuni shundan iboratki, funksiya qiymatlarini L ga istalgan darajada yaqinlashtirish uchun argumentni a ga yetarlicha yaqin tanlash mumkin.

Funksiya limitini hisoblashga misol

Quyidagi limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 1).$$

Ko‘phad funksiyalar barcha haqiqiy sonlarda uzluksiz bo‘lgani uchun limitni topishda $x = 2$ qiymatni bevosita qo‘yish mumkin:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 1) = 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = 9.$$

Demak,

$$\boxed{\lim_{x\to 2}(x^2 + 3x - 1) = 9.}$$

Biroq har qanday limitni bevosita qo‘yish usuli bilan hisoblab bo‘lmaydi. Ayrim hollarda ifodani soddalashtirish, ko‘paytuvchilarga ajratish yoki boshqa algebraik almashtirishlarni bajarish talab etiladi.

Masalan:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Agar $x = 2$ bevosita qo‘yilsa, $\frac{0}{0}$ ko‘rinishidagi noaniqlik hosil bo‘ladi. Suratni ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Shunda $x \neq 2$ uchun:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2.$$

Natijada:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4.$$

Ushbu misol limit mavjud bo‘lishi uchun funksiyaning limit nuqtasida albatta aniqlangan bo‘lishi shart emasligini ko‘rsatadi.

Bir tomonlama limitlar va limitlarning asosiy xossalari

Funksiyaning limitini o‘rganishda argumentning nuqtaga chap tomondan yoki o‘ng tomondan yaqinlashishi alohida ahamiyatga ega. Shu sababli bir tomonlama limitlar tushunchasi kiritiladi.

Agar x argument a nuqtaga chap tomondan, ya’ni $x < a$ sharti ostida yaqinlashsa, chap tomonlama limit quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x\to a-} f(x).$$

Argument a nuqtaga o‘ng tomondan, ya’ni $x > a$ sharti ostida yaqinlashganda esa o‘ng tomonlama limit quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x\to a+} f(x).$$

Ikki tomonlama limit mavjud bo‘lishi uchun chap va o‘ng tomonlama limitlar mavjud hamda o‘zaro teng bo‘lishi kerak. Ya’ni,

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L.$$

Agar ushbu limitlar turlicha bo‘lsa, ikki tomonlama limit mavjud bo‘lmaydi.

Masalan, quyidagi funksiya berilgan bo‘lsin:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x+3, & x \geq 0. \end{cases}$$

Bu funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi chap tomonlama limiti:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1.$$

O‘ng tomonlama limiti esa:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 3.$$

Ular o‘zaro teng bo‘lmagani sababli

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

mavjud emas.

Limitlarni hisoblashda quyidagi asosiy qoidalardan foydalaniladi. Agar

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$$

bo‘lsa, u holda quyidagi tengliklar o‘rinli:

1. Yig‘indining limiti:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$$

2. Ayirmaning limiti:

$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B.$$

3. Ko‘paytmaning limiti:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB.$$

4. Nisbatning limiti, agar $B \neq 0$ bo‘lsa:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Ushbu qoidalar murakkab limitlarni sodda ifodalarga ajratib hisoblash imkonini beradi. Ular matematik analizning keyingi mavzularini o‘zlashtirishda ham muhim nazariy asos hisoblanadi.

Funksiyaning uzluksizligi va uning matematik mazmuni

Funksiyaning uzluksizligi limit tushunchasi bilan bevosita bog‘liq. Intuitiv jihatdan uzluksiz funksiya grafigida ma’lum nuqtada uzilish, sakrash yoki bo‘shliq kuzatilmaydi. Biroq matematik nuqtayi nazardan uzluksizlik qat’iy shartlar orqali aniqlanadi.

f(x)funksiya $x = a$ nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun quyidagi uchta shart bajarilishi kerak:

1. f(a)funksiyaning qiymati mavjud bo‘lishi;
2. $\lim_{x\to a} f(x)$limit mavjud bo‘lishi;
3. Limit funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lishi.

Ushbu shartlar birgalikda quyidagi tenglik bilan ifodalanadi:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$$

Demak, funksiyaning uzluksizligi uning limit qiymati bilan haqiqiy qiymati o‘zaro teng bo‘lishini anglatadi.

Masalan, $f(x) = x^2 + 2x$ funksiya berilgan bo‘lsin. Uning $x = 1$ nuqtadagi qiymati:

$$f(1) = 1^2 + 2\cdot 1 = 3.$$

Limitni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 2x) = 3.$$

Limit va funksiyaning qiymati teng bo‘lgani uchun funksiya $x = 1$ nuqtada uzluksizdir. Bu xulosa ko‘phad funksiyalarning barcha haqiqiy sonlarda uzluksiz ekanligi haqidagi umumiy xususiyatga mos keladi.

Funksiya biror oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u shu oraliqda uzluksiz funksiya deyiladi. Masalan, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ va $f(x) = x^3$ funksiyalar o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

Yopiq $[a,b]$ oraliqda uzluksizlikni o‘rganishda chekka nuqtalar ham hisobga olinadi. Bunda a nuqtada o‘ng tomonlama, b nuqtada esa chap tomonlama uzluksizlik talab qilinadi.

Uzilish nuqtalari va uzluksizlikning asosiy xossalari

Agar funksiya biror nuqtada uzluksizlik shartlaridan kamida bittasini bajarmasa, ushbu nuqta funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi. Uzilishlar funksiyaning ifodasi, aniqlanish sohasi va bir tomonlama limitlariga qarab turlicha namoyon bo‘ladi.

Birinchi tur uzilish. Chap va o‘ng tomonlama limitlar mavjud hamda chekli bo‘lib, o‘zaro teng bo‘lmagan holat sakrashli uzilish deyiladi. Masalan, oldingi bo‘limda keltirilgan bo‘lakli funksiya $x = 0$ nuqtada sakrashli uzilishga ega.

Bartarf etiladigan uzilish. Agar funksiyaning biror nuqtadagi limiti mavjud bo‘lsa-yu, funksiya shu nuqtada aniqlanmagan yoki uning qiymati limitga teng bo‘lmasa, bunday uzilish bartarf etiladigan uzilish deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1.$$

Ifodani soddalashtirsak:

$$f(x) = x + 1, x \neq 1.$$

Shuning uchun:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Lekin $f(1)$ aniqlanmagan. Agar funksiyaga $f(1) = 2$ qiymat berilsa, u $x = 1$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Demak, bu uzilishni funksiyaning qiymatini tegishli ravishda belgilash orqali bartaraf etish mumkin.

Ikkinchi tur uzilish**.** Agar nuqtada chap yoki o‘ng tomonlama limitlardan kamida bittasi chekli mavjud bo‘lmasa, masalan, funksiya cheksiz o‘sib ketsa yoki cheksiz tebransa, bunday holat ikkinchi tur uzilish sifatida qaraladi. Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlanmagan. Uning o‘ng tomonlama limiti $+\infty$, chap tomonlama limiti esa $-\infty$ ga intiladi. Shu sababli ushbu nuqtada chekli ikki tomonlama limit mavjud emas.

Uzluksiz funksiyalar bir qator muhim xossalarga ega. Agar f va g funksiyalar bir nuqtada uzluksiz bo‘lsa, ularning yig‘indisi, ayirmasi va ko‘paytmasi ham shu nuqtada uzluksiz bo‘ladi. Maxraj nolga teng bo‘lmagan hollarda ularning nisbati ham uzluksizdir.

Bundan tashqari, yopiq va chegaralangan $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funksiya o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bu xossa Veyershtrass teoremasi bilan ifodalanadi.

Oraliq qiymatlar teoremasiga ko‘ra, agar funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi har qanday qiymatni kamida bir marta qabul qiladi. Xususan, $f(a)$ va $f(b)$ qarama-qarshi ishorali bo‘lsa, (a,b) oraliqda kamida bitta c nuqta mavjud bo‘lib, $f(c) = 0$ tenglik bajariladi.

Ushbu teoremalar tenglamalarning ildizlarini aniqlash, optimallashtirish masalalarini yechish va matematik modellarni tahlil qilishda katta ahamiyatga ega.

Funksiya limiti va uzluksizligining amaliy ahamiyati

Funksiya limiti va uzluksizligi faqat nazariy matematik tushunchalar bo‘lib qolmay, balki turli amaliy jarayonlarni o‘rganishda ham qo‘llaniladi.

Fizikada limit yordamida jismning oniy tezligi, tezlanishi va boshqa o‘zgaruvchan kattaliklari aniqlanadi. Masalan, jismning harakat qonuni $s = s(t)$ bilan berilgan bo‘lsa, uning oniy tezligi quyidagi limit orqali ifodalanadi:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Bu ifoda hosila tushunchasining asosini tashkil qiladi.

Iqtisodiyotda uzluksiz funksiyalar xarajat, daromad, talab va ishlab chiqarish hajmi o‘rtasidagi bog‘lanishlarni modellashtirishda ishlatiladi. Kompyuter grafikasi va muhandislikda esa uzluksizlik egri chiziqlarni qurish, signallarni tahlil qilish hamda fizik jarayonlarni matematik ifodalashda muhim hisoblanadi.

Shunday qilib, limit va uzluksizlik tushunchalarini chuqur o‘zlashtirish matematik analizning keyingi bo‘limlarini o‘rganish uchun zarur bo‘lib, nazariy bilimlarni amaliy masalalarga tatbiq etish imkonini kengaytiradi.

XULOSA

Funksiya limiti va uzluksizligi matematik analizning o‘zaro chambarchas bog‘liq bo‘lgan asosiy tushunchalaridir. Limit funksiyaning argument ma’lum qiymatga yaqinlashgandagi xatti-harakatini ifodalasa, uzluksizlik shu limitning funksiyaning nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lishini talab qiladi.

Maqolada limitning matematik ta’rifi, bir tomonlama limitlar, limitlarni hisoblash qoidalari, uzluksizlik shartlari va uzilish nuqtalarining asosiy turlari ko‘rib chiqildi. Misollar

yordamida limitning mavjudligi bilan funksiyaning nuqtada aniqlanganligi bir xil tushuncha emasligi asoslandi.

Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari, jumladan, oraliq qiymatlar va eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishish xususiyatlari ko‘plab matematik masalalarni yechishda muhim o‘rin tutadi. Shu bilan birga, ushbu tushunchalar hosila, integral va differensial tenglamalar nazariyasini o‘rganish uchun mustahkam poydevor yaratadi.

Umuman olganda, funksiya limiti va uzluksizligini nazariy hamda amaliy jihatdan o‘rganish talabalarning matematik tafakkurini rivojlantiradi, mantiqiy xulosa chiqarish ko‘nikmalarini shakllantiradi va murakkab jarayonlarni matematik modellashtirish imkoniyatlarini kengaytiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Stewart J. Calculus: Early Transcendentals. Cengage Learning.
2. Thomas G. B., Weir M. D., Hass J. Thomas' Calculus. Pearson.
3. OpenStax. Calculus, Volume 1. “The Limit of a Function” va “Continuity” bo‘limlari. https://openstax.org/books/calculus-volume-1
4. Massachusetts Institute of Technology (MIT). Calculus: Formal Definition of Limit and Continuity. https://math.mit.edu/
5. Piskunov N. S. Differensial va integral hisob. Matematik analiz bo‘yicha o‘quv adabiyoti.