IRRATSIONAL TENGLAMA VA IFODALARNI YECHISHNING NOSTANDART USULLARI

Xayrullayev Muhammad Saydulla o‘g‘li

SamDPI “Matematika’’ kafedrasi assistenti

E-mail: xayrullayevmuhammad063@gmail.com

Doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.20108491

Annotatsiya: Maqolada matematik masalalarni, xususan, nostandart tenglama va ifodalarni yechishda vektorlar, trigonometrik almashtirishlar va maxsus belgilashlar usullaridan foydalanish yoritilgan.Maqolada murakkab ko'rinishdagi irratsional tenglamalar va ifodalarning eng kichik qiymatlarini topishda an'anaviy usullardan tashqari, samarali va qisqa yo'llarni ko'rsatib beradi. Taqdim etilgan usullar o'quvchi va talabalarning mantiqiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirishga xizmat qiladi.

Kalit so'zlar: Irratsional tenglamalar va ifodalar,nostandart masalalar, vektorlar skalyar ko'paytmasi, trigonometrik almashtirish, eng kichik qiymat, belgilash usuli.

Kirish. Bugungi kunda ta’lim tizimida matematika fanini o‘qitishning sifat va samaradorligini oshirish, o‘quvchilarning mantiqiy fikrlash doirasini kengaytirish dolzarb masalalardan biri bo‘lib qolmoqda. Ayniqsa, matematik olimpiadalar va yuqori darajadagi imtihonlarda uchraydigan nostandart masalalarni yechish o‘quvchi va talabalardan nafaqat nazariy bilimlarni, balki kreativ usullarni o‘rinli qo‘llay olish mahoratini ham talab etadi. Odatda, irratsional tenglamalar yoki ko‘p o‘zgaruvchili ifodalarning eng kichik qiymatini topishga doir masalalar standart usullar (masalan, darajaga ko‘tarish yoki hosila olish) orqali yechilganda juda murakkab va ko‘p vaqt talab qiladigan hisob-kitoblarga olib keladi. Quyida ushbu turdagi masalalarni vektorlarning skalyar ko‘paytmasi xossalaridan foydalanish, trigonometrik almashtirishlar kiritish va maxsus belgilashlar usuli yordamida sodda va tushunarli tarzda yechish usullarini ko‘rishimiz mumkin.

1-misol: Tenglamaning ildizlari yig`indisini toping.

$$x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$$

Yechish. Berilgan tenglamani yechish uchun $\vec{a}(x;1) va\ \vec{b}(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x})$ vektorlarni qaraymiz. Tenglamaning chap qismini bu vektorlarning skalyar ko`paytmasi ekan, o`ng qismi esa bu vektorlarning uzunliklarining ko`paytmasi ekan .

Demak $\vec{a}*\ \vec{b}=|\vec{a}|*\ |\vec{b}|$ shart bajarilishi uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kolleniar ya`ni

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$$

$(x>0)$ tenglik bajarilishi kerak. Bu tenglamani ikkala tomonini darajaga ko‘tarib, tenglamani yechamiz.

$$x^2(3-x)=x+1$$

$$x^3-3x^2+x+1=0$$

Yuqoridagi tenglamani ko‘paytuvchilarga ajratganimizda quyidagi ko‘rinishga keladi.

$$(x-1)(x^2-2x-1)=0$$

va yechimlari $x_1=1$ $x_2+x_3=2$ bo‘ladi.

Demak tenglamaning ildizlari yig‘indisi $x_1+x_2+x_3=3$.

2-misol. Agar $x+y=12$ bo`lsa, $\sqrt{4+x^2}+\sqrt{9+y^2}$ ifodaning eng kichik qiymatini toping?

Yechish: Bunday nostandart masalalarni yechishda belgilash usulidan foydalanamiz.

Ifoda $A=\sqrt{4+x^2}+\sqrt{9+y^2}$ bunda $x=2a$ va $y=3a$ deb belgilash kiritamiz.

Bizga berilgan $x+y=12$ tenglikdan foydalanib x va y larni o`rniga olgan belgilashimizni olib kelib qo`yamiz.

$$2a+3a=12$$

Bundan ko`rinadiki a ning qiymati bizda $a=\frac{12}{5}$ ekan.

$A=\sqrt{4+x^2}+\sqrt{9+y^2}$ ifodaga x va y larni o`rniga $x=2a$ va $y=3a$ larni qo`yamiz.

$A=\sqrt{4+4a^2}+\sqrt{9+9a^2}=2\sqrt{1+a^2}+3\sqrt{1+a^2}=5\sqrt{1+a^2}$ ko`rinishdagi ifoda hosil bo`ladi. a ni o‘rniga $a=\frac{12}{5}$ qiymatini olib borib quysak, bizda yuqoridagi ifodaning eng kichik qiymat hosil bo`ladi.

$A=5\sqrt{1+a^2}=5\sqrt{1+\frac{144}{25}}=5*\frac{13}{5}=13$ bundan ko`rinadiki $\sqrt{4+x^2}+\sqrt{9+y^2}$ ifodaning eng kichik qiymati 13 ga teng ekan.

3-misol. Berilgan $x,y,z\in R^+$ tenglama uchun ushbu tengliklar o`rinli bo`lsa

$$\sqrt{16-x^2}+\sqrt{25-y^2}+\sqrt{36-z^2}=12$$

$$x+y+z=9$$

$x*\ y*\ z=?$ toping.

Yechish: Bunday tenglamalar turli xil usullarda ishlashimiz mumkin. Biz yana belgilash kiritish orqali yechim izlaymiz.

Avval $x=4a$, $y=5a$, $z=6a$ shu ko`rinishda belgilash kiritamiz.

$$x+y+z=9$$

tenglikdan foydalanib a ning qiymatini topamiz.

$$4a+5a+6a=9$$

$a=\frac{3}{5}$ ekanligini kelib chiqadi. $x=4a$, $y=5a$, $z=6a$

a ning qiymatini yuqoridagi belgilashga qo’yib x,y,z larning qiymatini topamiz. Bu qiymatlar yuqoridagi tengliklarni qanoatlantiradi.

$$x=\frac{12}{5}\ ,y=3,\ z=\frac{18}{5}$$

Endi bundan foydalanga holda $x*\ y*\ z$ ning qiymatini osongina topishimiz mumkin.

$x*\ y*\ z=\frac{12}{5}*\ 3*\ \frac{18}{5}=\frac{648}{25}$ qiymati kelib chiqadi.

4-misol. Tenglamani yeching.

$$\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$$

Yechish: Triganometrik almashtirishni qaraymiz.

$$x=cost,\ t\in[0,\pi]$$

Ushbu belgilash orqali quyidagi tenglikni hosil qilamiz.

$$\sqrt{1-cos^2t}=4cos^3t-3cost$$

$$sint=cos3t$$

$$sint-\sin\left(\frac{\pi}{2}-3t\right)=0$$

$$2\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=0\ va\ \sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

demak ikkala ko‘paytmani ham nolga tenglash mumkin va quyidagicha yechimlarga ega bo‘lamiz.

$$t=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z$$

$$t=\frac{5\pi}{4}+\pi n,\quad n\in Z$$

Birinchi tenglamani $[0,\pi]$ oraliqda ikkita $t_1=\frac{\pi}{8}$ va $t_2=\frac{5\pi}{8}$ yechimlari

Ikkinchi tenglamani esa $t_3=\frac{\pi}{4}$ yechimlari bor.

Ularga mos x ning qiymatlari esa quyidagicha.

$x_1=\cos(\frac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

$x_2=\cos(\frac{5\pi}{8})=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

$x_3=\cos(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}/2$

Javob: $x_1=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$, $x_2=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, $x_3=\sqrt{2}/2$

5-misol. Agar x,y,z,t,k haqiqiy sonlar uchun $x+y+z+t+k=40$ shart bajarilsa, quyidagi ifodaning eng kichik qiymatini toping.

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2}+\sqrt{9+z^2}+\sqrt{16+t^2}+\sqrt{400+k^2}$$

Yechish: Bunday tipdagi masalarni belgilash orqali osongina ishlashimiz mumkin.

$$A=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2}+\sqrt{9+z^2}+\sqrt{16+t^2}+\sqrt{400+k^2}$$

$x=a$, $y=2a$, $z=3a$, $t=4a$, $k=20a$ ko`rinishda belgilash olamiz.

$$x+y+z+t+k=40$$

Ushbu tenglikdan foydalamiz.

$$a+2a+3a+4a+20a=40$$

bundan $a=\frac{4}{3}$ ekanligi kelib chiqadi.

$$A=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2}+\sqrt{9+z^2}+\sqrt{16+t^2}+\sqrt{400+k^2}$$

$x=a$, $y=2a$, $z=3a$, $t=4a$, $k=20a$ ko`rinishda olgan belgilashimizni o`rniga qo`yib A orqali ifodalaymiz.

$$A=\sqrt{1+a^2}+\sqrt{4+4a^2}+\sqrt{9+9a^2}+\sqrt{16+16a^2}+\sqrt{400+400a^2}$$

$$A=\sqrt{1+a^2}+2\sqrt{1+a^2}+3\sqrt{1+a^2}+4\sqrt{1+a^2}+20\sqrt{1+a^2}$$

$$A=30\sqrt{1+a^2}$$

topgan $a=\frac{4}{3}$ ni o`rniga qo`yamiz.

$$A=30\sqrt{1+\frac{16}{9}}=30*\frac{5}{3}=50$$

Ifodaning eng kichik qiymati kelib chiqadi.

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{4+y^2}+\sqrt{9+z^2}+\sqrt{16+t^2}+\sqrt{400+k^2}=50$$

Xulosa. Ushbu maqolada irratsional tenglamalar va ifodalarni yechishning nostandart usullari ko‘rib chiqildi. Jumladan, vektorlarning skalyar ko‘paytmasi xossalaridan foydalanish, trigonometrik almashtirishlar kiritish hamda maxsus belgilash usullari yordamida murakkab ko‘rinishdagi masalalarni sodda va qisqa yo‘l bilan yechish mumkinligi misollar asosida yoritildi.

Tahlil qilingan misollar shuni ko‘rsatadiki, an’anaviy usullar ayrim hollarda murakkab hisob-kitoblarga olib kelgan bo‘lsa, nostandart yondashuvlar masalaning mohiyatini chuqurroq tushunishga va yechimni samarali topishga yordam beradi. Ayniqsa, bunday usullar o‘quvchi va talabalarning mantiqiy, analitik hamda ijodiy fikrlash qobiliyatini rivojlantirishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydanilgan adabiyotlar

1. N.Rahimov.(2020) Matematikadan nostandart masalalar. I qism. Samarqand: SamDChTI.
2. Algebra va analiz asoslari / A. Abdurahmonov, T. To‘laganov. – Toshkent: O‘qituvchi, 2018.
3. Algebraik va irratsional tenglamalar / N. Ahmedov. – Toshkent: Universitet, 2019.
4. Matematika olimpiada masalalari / A. Eskin, G. Galperin. – Moskva, 2017.
5. Tohirov A., Mo‘minov G‘. Matematikadan olimpiada masalalari [Olympiad problems in mathematics]. Tashkent: O‘qituvchi.
6. А Солиев, М.Исроилов “Сонлар назарияси асослари” - Т., ”Ўқитувчи”, 2005