KO‘P O’LCHOVLI TASODIFIY MIQDORLARNING SHARTLI MATEMATIK KUTILMASI.

Toshqulov H.A.
Kattaqo’rg’on davlat pedagogika instituti talabasi.
e-mail: kh.toshkulov@mathinst.uz

Shukurov.Z.K.
Kattaqo’rg’on davlat pedagogika instituti talabasi.

Eshmurodova Z.E.
Kattaqo’rg’on davlat pedagogika instituti talabasi.
e-mail: zarnigoreshmurodova73@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.20323503

Anotatsiya: Ushbu ishda ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlarning xossalari keltirib o’tildi. Shuningdek, ko‘p o‘lchovli tasodifiy miqdorlar orasidagi bog‘liqlikni aniqlashda shartli matematik kutilmaning ahamiyati ko‘rsatib beriladi. Tadqiqotda sodda tasodifiy miqdorlar uchun shartli matematik kutilma o’rganildi.

Kalit so’zlar: ko’p o’lchovli tasodifiy miqdorlar, shartli matematik kutilma, birgalikdagi taqsimot, shartli taqsimot**.**

Ko’p o’lchovli tasodifiy miqdorlar.

Faraz qilaylik (Ω,F,P) ehtimollik fazosida $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar berilgan bo’lsin.

Ushbu

$$\xi(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))$$

vektorlarni qaraylik.

$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar yordamida beriladigan $\xi:\Omega\to R^n$ akslantirish tasodifiy vektor yoki ko’p o’lchovli tasodifiy miqdor deyiladi.

Ushbu

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=P\{\xi_1<x_1,\ldots,\xi_n<x_n\}$$

funksiya $(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ tasodifiy vektorlarning taqsimot funksiyasi yoki $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimot funksiyasi deyiladi. Taqsimot funksiyaning muvofiqlik xossalari deb yuritiladigan bazi xossalarini keltiramiz:

1. $\lim\limits_{x_n\to\infty} F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,..,x_n)=F_{\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}}(x_1,..,x_{n-1})$.
2. $\lim\limits_{x_n\to-\infty} F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,..,x_n)=0$.

bu yerda limit oxirgi argument bo’yicha olingan, lekin bus hart emas bo’lib ixtiyoriy argument bo’yicha limitga o’tish mumkin edi.

3. $F_{\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n}(x_1,x_2..,x_n)$ taqsimot funksiya har bir argument bo’yicha kamaymaydigan funksiya.
4. $F_{\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n}(x_1,x_2..,x_n)$ taqsimot funksiya har bir argumenti bo’yicha chapdan uzluksiz.
5. $F_{\xi_1,\xi_2\ldots,\xi_n}(+\infty,+\infty,\ldots,+\infty)=1$ munosabat o’rinli.

Ixtiyoriy $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ funksiya n o’lchovli tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi bo’lishi uchun yuqorida keltirilgan xossalarni bajarishi kerak.

Ta’rif. Agar chekli yoki sanoqli $\{(x_{m_1},x_{m_2},\ldots,x_{m_k})\}$ nuqtalar to’plami uchun

$$P\left(\xi_1=x_{m_1},\xi_2=x_{m_2},\ldots,\xi_n=x_{m_k}\right)=p_{x_{m_1},x_{m_2},x_{m_k}}$$

va

$$\sum_{(x_{m_1},\dots,x_{m_k})} p_{x_{m_1},x_{m_2},x_{m_k}}=1$$

Munosabatlar bajarilsa, u holda $\xi=(\xi_1,..,\xi_n)$ diskret tipdagi tasodifiy vektor deyiladi.

Ta'rif. Agar funksiya $f(t_1,\dots,t_n)\geq 0$ bo'lib tasodifiy vektorning taqsimot funksiyasi ushbu

$$F_{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n}(x_1,x_2,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1,\dots,\xi_n}(t_1,t_2,\dots t_n)dt_1dt_2\dots dt_n$$

ko'rinishda bo'lsa, $\xi=(\xi_1,..,\xi_n)$ absolyut uzluksiz tipdagi tasodifiy vektor deyiladi.

$$\int_{R^n} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n=1$$

ekanligi ravshan. Yuqoridagi $f(t_1,\dots,t_n)$ funksiya $\xi=(\xi_1,..,\xi_n)$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deyiladi.

Sodda tasodifiy miqdorlar uchun shartli matematik kutilma.

(Ω,F,P) ehtimollik fazosida ikki sodda tasodifiy miqdor berilgan bo'lsin.

$$\xi(\omega)=\sum_{i=1}^{n} a_i I\{\omega \quad A_i\}$$

bu yerda $a_k \quad a_l,\ A_k\cap A_l=\phi,\ k \quad l,\ \bigcup_{k=1}^{n} A_k=\Omega,\ A_k=\xi^{-1}(a_k)$

$$\eta(\omega)=\sum_{j=1}^{m} b_j I\{\omega \quad B_j\}$$

bu yerda $b_k \quad b_l,\ B_k\cap B_l=\phi,\ k \quad l,\ \bigcup_{k=1}^{m} B_k=\Omega,\ B_k=\eta^{-1}(b_k),$

$A_i=\bigcup_{j=1}^{m}(A_i\cap B_j)$ va $B_j=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap B_j)$

munosabatlar o'rinli. U holda $\xi(\omega)$ va $\eta(\omega)$ tasodifiy miqdorlarni

$$\xi(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i I\{\omega \quad A_i\cap B_j\}$$

$$\eta(\omega)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j I\{\omega \quad A_i\cap B_j\}$$

ko'rinishda yozish mumkin $\xi(\omega)$ va $\eta(\omega)$ sodda tasodifiy miqdorlarning birgalikdagi taqsimotini quyidagi jadval ko'rinishida tasvirlash mumkin.

η / ξ	b_1	b_2	…	b_m	
a_1	P_{11}	P_{12}	…	P_{1m}	P_1
a_2	P_{21}	P_{22}	…	P_{2m}	P_2
…	..	..	..	..	…
a_n	P_{n1}	P_{n2}	…	P_{nm}	P_n
	P_1	P_2	…	P_m	1

bu yerda

$$P_{ij} = P\left(A_i \cap B_j\right) = P\left(\xi^{-1}\left(a_i\right) \cap \eta^{-1}\left(b_j\right)\right) = P\left(\xi = a_i, \eta = b_j\right)$$

$$P_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij} = \sum_{j=1}^{m} P\left(A_i \cap B_j\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{m}\left(A_i \cap B_j\right)\right) = P\left(A_i\right) = P\left(\xi = a_i\right)$$

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i \cap B_j\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i \cap B_j\right)\right) = P\left(B_j\right) = P\left(\eta = b_j\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{j=1}^{m} P_j = 1$$

$\xi\left(\omega\right)$ va $\eta\left(\omega\right)$ tasodifiy miqdorlar bog'liqsiz bo'ladi faqat va faqat ixtiyoriy i, j lar uchun $P_{ij} = P_i \ P_j$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Kelgusida ixtiyoriy i uchun $P_i > 0$ va ixtiyoriy j uchun $P_j > 0$ deb faraz qilamiz. $\xi\left(\omega\right)$ va $\eta\left(\omega\right)$ sodda tasodifiy miqdorlar birgalikdagi taqsimot jadvalida i - nomerli satrini qaraymiz.

$$\frac{P_{i1}}{P_i}, \frac{P_{i2}}{P_i}, \ldots, \frac{P_{im}}{P_i}$$

munosabatlarni qaraymiz. Bu sonlar manfiy emas va yig'indisi birga teng.

$$\frac{P_{ij}}{P_i} = \frac{P\left(A_i \cap B_j\right)}{P\left(A_i\right)} = P\left(B_j \middle| A_i\right) = P\left\{\eta = b_j \middle| \xi = a_i\right\}$$

shartli ehtimollikni qaraymiz

$$P\left\{\eta = b_1 \middle| \xi = a_i\right\},\ P\left\{\eta = b_2 \middle| \xi = a_i\right\}, \ldots, P\left\{\eta = b_m \middle| \xi = a_i\right\}$$

ehtimolliklar sistemasi $\eta\left(\omega\right)$ tasodifiy miqdorning $\xi = a_i$ shartdagi shartli taqsimotlarini aniqlaydi. Xuddi shunday

$$\frac{P_{ij}}{P_j} = \frac{P\left(A_i \cap B_j\right)}{P\left(B_j\right)} = P\left(A_i \middle| B_j\right) = P\left\{\xi = a_i \middle| \eta = b_j\right\}$$

$P\{\xi = a_1 | \eta = b_j\}$, $P\{\xi = a_2 | \eta = b_j\}$, ..., $P\{\xi = a_n | \eta = b_j\}$

ehtimolliklar sistemasi $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorlarning $\eta = b_j$ shartdagi shartli taqsimotlarini aniqlaydi.

Ta'rif . $\eta(\omega)$ tasodifiy miqdorlarning $\{\xi = a_i\}$ shartdagi shartli matematik kutilmasi

$$E(\eta | \xi = a_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j P\{\eta = b_j | \xi = a_i\} \quad (1)$$

tenglik bilan,

$\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorlarning $\{\eta = b_j\}$ shartli matematik kutilmasi

$$E(\xi | \eta = b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i P\{\xi = a_i | \eta = b_j\} \quad (2)$$

tenglik yordamida aniqlanadi.

Ta'rif . Taqsimoti quyidagi ko'rinishda aniqlanadigan

$E(\eta\|\xi)$	$E(\eta\|\xi = a_1)$	$E(\eta\|\xi = a_2)$	$\cdots$	$E(\eta\|\xi = a_n)$
P	$P(\xi = a_1)$	$P(\xi = a_2)$	$\cdots$	$P(\xi = a_n)$

$E(\eta|\xi)$ tasodifiy miqdorga $\eta(\omega)$ tasodifiy miqdorning ξ tasodifiy miqdorga nisbatan shartli matematik kutilmasi deyiladi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, shartli matematik kutilma ko'p o'lchovli tasodifiy miqdorlar orasidagi bog'liqlikni aniqlashda muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. "Теория вероятностей и математическая статистика", В. Я. Дерр, Санктпетербург Москва Краснодар 2021.
2. "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika", A.a.abdushukurov, Toshkent-2010.