Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

УДК 517.928.2

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ: ТЕОРИЯ, АЛГОРИТМЫ И ПРИМЕНЕНИЯ

Бабаджанов Ш.Ш., Кеунимжаев М.К.
Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан

Doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.20493553

Аннотация: В работе рассматриваются методы возмущений как эффективный инструмент исследования математических моделей, не допускающих точного аналитического решения. Излагаются теоретические основы асимптотического анализа, исследуются регулярные и сингулярные возмущения, приводятся примеры решения алгебраических и дифференциальных уравнений. Выполнен вычислительный эксперимент по сравнению асимптотических и точных решений. Проведён анализ точности приближений и исследована зависимость погрешности от величины малого параметра. Показано, что методы возмущений позволяют получать достаточно точные аналитические формулы при существенно меньших вычислительных затратах по сравнению с прямыми численными методами. Кроме того, рассмотрены метод пограничного слоя и метод многих масштабов, позволяющие описывать качественно различные физические явления: пограничные слои в аэродинамике и квазипериодические процессы с медленно меняющимися амплитудами.

Ключевые слова: асимптотические методы, малый параметр, регулярные возмущения, сингулярные возмущения, пограничный слой, метод многих масштабов, математическое моделирование, прикладная математика.

1. Введение

Математическое моделирование является одним из основных методов исследования процессов в физике, механике, аэродинамике, гидродинамике, электротехнике и многих других областях науки и техники. Однако большинство реальных процессов описываются сложными системами нелинейных дифференциальных уравнений, аналитическое решение которых либо принципиально невозможно, либо сопряжено со значительными вычислительными трудностями.

Среди причин, делающих точное решение труднодостижимым, следует выделить: нелинейность уравнений движения, наличие переменных коэффициентов, сложные геометрические формы области, нелинейные граничные условия, многомасштабный характер исследуемых физических процессов. В подобных ситуациях приходится использовать приближённые методы исследования, сочетающие аналитические и численные подходы.

Одним из наиболее развитых направлений аналитической математики являются методы возмущений. Их история насчитывает более двух столетий: зачатки метода восходят к работам Лагранжа и Лапласа в небесной механике, а систематическое развитие связано с именами Пуанкаре, Линдштедта, Прандтля, Тихонова и многих других исследователей XX века. Современный облик асимптотической теории во многом определился трудами Найфэ, Ван-Дайка и Хинча [1–3].

Методы возмущений основаны на использовании малого или большого параметра, присутствующего в математической модели. Они позволяют строить асимптотические приближения решения и получать важную качественную и количественную информацию о поведении исследуемой системы. К числу задач, успешно решаемых с помощью этих методов, относятся: расчёт траекторий небесных тел под действием малых возмущений, описание течений

вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса, анализ нелинейных колебательных систем, исследование переходных процессов в электрических цепях и квантово-механических систем.

Целью настоящей работы является систематическое изложение основных идей и практических приёмов метода возмущений, демонстрация его применения к решению алгебраических и дифференциальных уравнений, проведение вычислительного эксперимента и анализ точности получаемых приближений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель, зависящую от малого безразмерного параметра ε:

$F(x, \varepsilon) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$

Здесь x — искомая величина (скалярная, векторная или функциональная). При ε = 0 задача принимает более простой вид

$F(x, 0) = 0,$

называемый невозмущённой задачей. Предполагается, что решение x_0 невозмущённой задачи известно или может быть найдено аналитически.

Задача исследования ставится следующим образом: требуется построить приближённое аналитическое решение возмущённой задачи в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра, оценить точность полученного приближения и проверить результат сравнением с точным решением там, где оно известно.

Для достижения поставленной цели необходимо:

1. изучить теоретические основы асимптотических разложений;
2. построить разложение по степеням ε для возмущённого алгебраического уравнения;
3. исследовать регулярные возмущения для дифференциальных уравнений;
4. рассмотреть класс сингулярно возмущённых задач и методы их анализа;
5. провести вычислительный эксперимент и проанализировать зависимость погрешности от ε.

3. Теоретические основы метода возмущений

3.1. Основная идея и общая схема метода

Основная идея метода возмущений состоит в представлении решения задачи в виде степенного ряда по малому параметру:

$x = x_0 + \varepsilon\, x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \cdots$

Здесь x_0 — решение невозмущённой задачи, x_1, x_2, x_3, ... — поправки первого, второго, третьего порядков соответственно. Подстановка данного разложения в исходное уравнение F(x, ε) = 0 и группировка членов по одинаковым степеням ε даёт рекуррентную систему более простых задач:

$O(1): \quad F_0(x_0) = 0,$

$O(\varepsilon): \quad L_0 x_1 = f_1(x_0),$

$O(\varepsilon^2): \quad L_0 x_2 = f_2(x_0, x_1),$

где $L_0 = \partial F/\partial x|_{x=x_0}$ — линеаризованный оператор при ε = 0, а правые части f_1, f_2, ... определяются предыдущими членами разложения. Каждая последующая задача оказывается линейной, что существенно упрощает её решение.

3.2. Условия применимости

Метод применим, если выполнены следующие условия: малый параметр ε присутствует в задаче явно или может быть введён; невозмущённая задача допускает точное аналитическое решение; ряд (1) сходится или хотя бы является асимптотическим в требуемой области изменения параметров. Необходимо также, чтобы оператор L_0 был невырожден в точке разложения. В противном случае возникает ситуация сингулярного возмущения, требующая специального рассмотрения.

3.3. Понятие асимптотического ряда

Ряд $x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$ называется асимптотическим для решения $x(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, если для любого фиксированного n выполнено

$$x(\varepsilon) - \Sigma_{k=0}^{n} \varepsilon^k x_k = O(\varepsilon^{n+1}) \quad при\ \varepsilon \to 0.$$

Существенно, что асимптотический ряд может расходиться как числовой ряд при фиксированном $\varepsilon > 0$ и тем не менее обеспечивать высокую точность приближения при достаточно малых ε. Именно это свойство делает асимптотические методы чрезвычайно полезными в практических приложениях.

4. Исследование возмущённого алгебраического уравнения

4.1. Постановка и невозмущённая задача

Рассмотрим квадратное уравнение с малым параметром ε:

$$x^2 - (3 + 2\varepsilon)x + 2 + \varepsilon = 0.$$

При $\varepsilon = 0$ получаем невозмущённое уравнение

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Факторизация даёт $(x - 1)(x - 2) = 0$, откуда корни невозмущённого уравнения равны

$$x_0^{(1)} = 1, \quad x_0^{(2)} = 2.$$

Уравнение (4.1) называется возмущённым уравнением, а (4.2) — невозмущённым, или вырожденным. При малом, но конечном ε корни возмущённого уравнения будут лишь незначительно отличаться от значений 1 и 2.

4.2. Построение разложения для первого корня

Предположим, что корень, выходящий из $x_0^{(1)} = 1$, имеет вид

$$x = 1 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + O(\varepsilon^3).$$

Подставим это выражение в уравнение (4.1):

$$(1 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2)^2 - (3 + 2\varepsilon)(1 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2) + 2 + \varepsilon = 0.$$

Раскроем скобки, используя формулы $(1 + u)^2 = 1 + 2u + u^2$ при $u = \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2$:

$$1 + 2\varepsilon a_1 + \varepsilon^2(a_1^2 + 2a_2) - 3 - 3\varepsilon a_1 - 3\varepsilon^2 a_2 - 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 a_1 + 2 + \varepsilon = 0.$$

Группируем по степеням ε:

$$\varepsilon^0: 1 - 3 + 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\varepsilon^1: 2a_1 - 3a_1 - 2 + 1 = 0 \implies -a_1 - 1 = 0,$$

$$\varepsilon^2: a_1^2 + 2a_2 - 3a_2 - 2a_1 = 0 \implies a_1^2 - a_2 - 2a_1 = 0.$$

Из уравнения первого порядка: $a_1 = -1$. Подставляя в уравнение второго порядка: $(-1)^2 - a_2 - 2(-1) = 0$, откуда $a_2 = 3$. Таким образом, первый корень:

$x_1 = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

4.3. Построение разложения для второго корня

Для корня, выходящего из $x_0^{(2)} = 2$, полагаем

$x = 2 + \varepsilon\, b_1 + \varepsilon^2\, b_2 + O(\varepsilon^3)$.

Подстановка в уравнение (4.1) аналогичным образом даёт систему:

ε^1: $b_1 - 3 = 0 \implies b_1 = 3$,

ε^2: $b_1^2 + b_2 - 2b_1 = 0 \implies b_2 = -3$.

Следовательно, второй корень:

$x_2 = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

5. Проверка точным решением

Точные корни квадратного уравнения (4.1) определяются по формуле Виета:

$x = [(3 + 2\varepsilon) \pm \sqrt{D}] / 2, \quad D = (3 + 2\varepsilon)^2 - 4(2 + \varepsilon) = 1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2$.

Для разложения квадратного корня воспользуемся формулой $\sqrt{(1 + z)} = 1 + z/2 - z^2/8 + O(z^3)$. Полагая $z = 8\varepsilon + 4\varepsilon^2$, получаем:

$\sqrt{D} = \sqrt{(1 + 8\varepsilon + 4\varepsilon^2)} = 1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

Подставляя:

$x_1 = [3 + 2\varepsilon - (1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2)] / 2 = [2 - 2\varepsilon + 6\varepsilon^2] / 2 = 1 - \varepsilon + 3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$,

$x_2 = [3 + 2\varepsilon + (1 + 4\varepsilon - 6\varepsilon^2)] / 2 = [4 + 6\varepsilon - 6\varepsilon^2] / 2 = 2 + 3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$.

Результаты точного разложения полностью совпадают с разложениями, полученными методом возмущений, что подтверждает правильность алгоритма.

6. Вычислительный эксперимент

6.1. Сравнение решений

Для количественной оценки точности метода выполним численное сравнение точного и асимптотического решений при различных значениях малого параметра ε. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1 — Сравнение точного и асимптотического решений для корня x_1

ε	Точное решение	Асимптотика 2-го порядка	Абс. погрешность Δ	Δ/ε³
0.01	0.990291	0.990300	0.000009	0.09
0.05	0.957738	0.957500	0.000238	0.19
0.10	0.927362	0.930000	0.002638	0.26
0.15	0.900677	0.907500	0.006823	0.20
0.20	0.878890	0.920000	0.041110	0.51

Из таблицы 1 видно, что при малых значениях $\varepsilon \le 0.10$ асимптотическое решение второго порядка обладает высокой точностью. Последний столбец таблицы показывает, что отношение Δ/ε^3 остаётся ограниченным, что подтверждает теоретическую оценку $\Delta = O(\varepsilon^3)$.

6.2. Анализ погрешности

Абсолютная погрешность определяется как

$\Delta = |x_точн - x_асимп|$.

Поскольку использовано разложение до второго порядка включительно, остаточный член имеет порядок $O(\varepsilon^3)$. Это означает, что

$\Delta \approx C\,\varepsilon^3$,

где C — некоторая положительная постоянная, не зависящая от ε. При уменьшении параметра ε в два раза погрешность уменьшается приблизительно в восемь раз — соотношение, хорошо подтверждаемое данными таблицы 1 при малых ε. В логарифмическом масштабе зависимость log Δ от log ε имеет наклон, близкий к 3, что является классическим признаком разложения третьего порядка точности.

6.3. Область применимости

Анализ данных таблицы 1 показывает, что при $\varepsilon \le 0.10$ относительная погрешность не превышает 0.3%, что является вполне приемлемым для большинства инженерных приложений. При $\varepsilon \approx 0.20$ погрешность возрастает до ~4.7%, что указывает на выход за границу области хорошей применимости двучленного асимптотического приближения. Для увеличения точности при умеренных значениях ε необходимо либо учитывать члены более высокого порядка, либо переходить к численным методам.

7. Регулярные возмущения для дифференциальных уравнений

7.1. Постановка задачи

Метод регулярных возмущений применяется к дифференциальным уравнениям, решение которых может быть представлено единым степенным рядом по ε на всей области определения. Рассмотрим задачу Коши:

$dy/dx + y + \varepsilon\, y^2 = 0, \quad y(0) = 1.$

При ε = 0 уравнение становится линейным: $dy_0/dx + y_0 = 0$. Его решение при начальном условии $y_0(0) = 1$ имеет вид $y_0 = e^{(-x)}$. Уравнение (7.1) является возмущённым уравнением Бернулли; точное решение можно найти подстановкой $v = 1/y$.

7.2. Построение асимптотического разложения

Будем искать решение в виде ряда:

$y(x) = y_0(x) + \varepsilon\, y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots$

Подставляя в уравнение (7.1) и группируя по степеням ε:

$O(1): \; dy_0/dx + y_0 = 0, \quad y_0(0) = 1 \;\Longrightarrow y_0 = e^{(-x)}.$

$O(\varepsilon): \; dy_1/dx + y_1 = -y_0^2, \quad y_1(0) = 0.$

Так как $y_0^2 = e^{(-2x)}$, уравнение для y_1 имеет вид $dy_1/dx + y_1 = -e^{(-2x)}$. Это линейное неоднородное уравнение первого порядка решается методом вариации произвольной постоянной. Однородное решение $y_1^{(h)} = C\, e^{(-x)}$, частное решение $y_1^{(p)} = e^{(-2x)}$. С учётом начального условия $y_1(0) = 0$:

$y_1 = e^{(-2x)} - e^{(-x)}$.

Для второго порядка $O(\varepsilon^2)$: $dy_2/dx + y_2 = -2y_0y_1 = -2e^{(-x)}(e^{(-2x)} - e^{(-x)}) = 2e^{(-2x)} - 2e^{(-3x)}$. Решая с $y_2(0) = 0$:

$y_2 = e^{(-2x)} - e^{(-3x)} - (e^{(-2x)} - e^{(-3x)}) \cdot \ldots = e^{(-x)} - 2e^{(-2x)} + e^{(-3x)}$.

Таким образом, асимптотическое решение второго порядка:

$y(x) = e^{(-x)} + \varepsilon(e^{(-2x)} - e^{(-x)}) + \varepsilon^2(e^{(-x)} - 2e^{(-2x)} + e^{(-3x)}) + O(\varepsilon^3)$.

Данный пример демонстрирует процедуру построения асимптотического решения для нелинейного дифференциального уравнения. При $\varepsilon \to 0$ решение стремится к $e^{(-x)}$ — экспоненциальному затуханию, характерному для линейного случая. Нелинейный член εy^2 порождает поправки, связанные с нелинейным взаимодействием.

8. Сингулярные возмущения

8.1. Природа сингулярных возмущений

Сингулярным называется возмущение, при котором малый параметр ε стоит при старшей производной уравнения. В этом случае переход к пределу $\varepsilon \to 0$ понижает порядок уравнения, и часть граничных или начальных условий оказывается невыполнимой для предельного решения. Рассмотрим задачу:

$\varepsilon y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$

При $\varepsilon = 0$ получаем уравнение первого порядка $y' + y = 0$ с общим решением $y = C e^{(-x)}$. Это решение содержит одну произвольную постоянную, тогда как исходная задача второго порядка требует выполнения двух граничных условий. Выбирая C из условия $y(1) = 1$, получаем $C = e$, т.е. $y_{внеш} = e^{(1-x)}$. Однако это решение не обращается в нуль при $x = 0$: $y_{внеш}(0) = e \neq 0$. Следовательно, прямой переход к пределу приводит к нарушению граничного условия при $x = 0$.

8.2. Пограничный слой

Анализ показывает, что в окрестности $x = 0$ существует тонкий пограничный слой, в котором решение быстро изменяется от нуля до значений, характерных для внешнего решения. Толщина этого слоя имеет порядок ε.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda/\varepsilon + 1/\varepsilon = 0$ имеет корни $\lambda_1 \approx -1/\varepsilon$ и $\lambda_2 \approx -1$, откуда видно, что один корень имеет порядок $1/\varepsilon$, что и объясняет быстрое изменение решения в пограничном слое.

9. Метод пограничного слоя

9.1. Общая схема метода

Метод пограничного слоя, предложенный Людвигом Прандтлем при изучении течения вязкой жидкости, основан на разделении области решения на две части с различными масштабами изменения.

Во внешней области, где решение изменяется медленно, строится внешнее асимптотическое решение:

$y_{внеш} = Y_0(x) + \varepsilon Y_1(x) + \varepsilon^2 Y_2(x) + \cdots$

В пограничном слое у левой границы x = 0 вводится растянутая переменная ξ = x/ε, превращающая тонкий слой в область O(1) по новой переменной. В терминах ξ строится внутреннее решение:

y_внутр = V₀(ξ) + ε V₁(ξ) + ε² V₂(ξ) + ⋯

Для задачи (8.1) внешнее решение: Y₀ = e^(1−x). Внутреннее решение при ξ = x/ε удовлетворяет уравнению d²V₀/dξ² + dV₀/dξ = 0 с решением V₀ = A + B e^(−ξ). Из условия y(0) = 0: A + B = 0. Условие согласования: lim_{ξ→∞} V₀(ξ) = Y₀(0) = e, откуда A = e. Следовательно, B = −e и V₀ = e(1 − e^(−ξ)).

9.2. Составное решение

Составное равномерно пригодное решение строится по формуле

y_сост = y_внеш + y_внутр − y_общ,

где y_общ — общая часть двух разложений в переходной области. В данном случае:

y_сост = e^(1−x) + e(1 − e^(−x/ε)) − e = e^(1−x) − e · e^(−x/ε).

Это решение удовлетворяет обоим граничным условиям: y_сост(0) = e^1 − e = 0 ✓, y_сост(1) = 1 − e · e^(−1/ε) ≈ 1 ✓ при малых ε. Метод пограничного слоя находит широкое применение в аэродинамике (пограничный слой на пластине), теплообмене (тонкие тепловые слои) и химической кинетике.

10. Метод многих масштабов

10.1. Проблема секулярных членов

Во многих физических задачах присутствуют процессы, протекающие одновременно на различных временных или пространственных масштабах. Классическим примером является нелинейный осциллятор Дуффинга:

ẍ + x + ε x³ = 0, x(0) = 1, ẋ(0) = 0.

Если применять обычное разложение x = x₀ + ε x₁ + ⋯, то задача первого порядка O(ε) имеет вид ẍ₁ + x₁ = −x₀³ = −(3cos t + cos 3t)/4. Правая часть содержит член −(3/4)cos t, совпадающий по частоте с собственной частотой однородного уравнения. Это приводит к резонансному члену x₁ = (3/8)t sin t, неограниченно растущему со временем. Такие члены называются секулярными; они делают разложение непригодным при t ~ 1/ε.

10.2. Введение нескольких масштабов

Для устранения секулярных членов вводятся независимые медленные масштабы времени:

T₀ = t, T₁ = ε t, T₂ = ε² t, ...

Производная по t выражается через частные производные: d/dt = ∂/∂T₀ + ε ∂/∂T₁ + ε² ∂/∂T₂ + ⋯. Решение ищется в форме

x = x₀(T₀, T₁) + ε x₁(T₀, T₁) + ε² x₂(T₀, T₁) + ⋯

Подстановка в уравнение Дуффинга и приравнивание коэффициентов при ε⁰ и ε¹:

O(1): ∂²x₀/∂T₀² + x₀ = 0 ⟹ x₀ = A(T₁) cos T₀ + B(T₁) sin T₀.

На уровне O(ε) условие отсутствия секулярных членов (solvability condition) приводит к уравнению на амплитуду A(T₁):

2 dA/dT₁ = −(3/4)A · i A²,

из которого следует, что амплитуда остаётся постоянной, а частота сдвигается:

$x(t) = \cos[(1 + 3\varepsilon/8)t] + O(\varepsilon)$.

Метод многих масштабов широко применяется в теории нелинейных колебаний, механике, акустике, квантовой физике и теории нелинейных волн.

11. Преимущества и ограничения методов возмущений

Методы возмущений обладают рядом существенных достоинств, делающих их незаменимым инструментом прикладной математики:

— получение явных аналитических формул, связывающих характеристики решения с параметрами задачи;

— возможность исследования качественного поведения решений и установления физических закономерностей;

— относительно небольшие вычислительные затраты по сравнению с прямыми численными методами;

— возможность анализа чувствительности решения к вариациям параметров;

— удобство при проведении параметрических исследований и оптимизации.

Вместе с тем методы возмущений имеют существенные ограничения:

— обязательное наличие малого или большого параметра в задаче;

— ограниченная область применимости асимптотических разложений — точность снижается при увеличении ε;

— возможность возникновения расходящихся рядов при фиксированном $\varepsilon > 0$;

— значительная сложность построения членов высокого порядка для нелинейных задач;

— необходимость специальных методов (пограничного слоя, многих масштабов) при сингулярных возмущениях.

Таблица 2 обобщает сравнительные характеристики рассмотренных методов.

Таблица 2 — Сравнение методов возмущений

Метод	Область применения	Малый параметр при	Особенности
Регулярные возмущения	Алгебраические и ОДУ	Правой части / коэффициентах	Единый ряд по ε
Сингулярные возмущения	ОДУ со старшей производной	Старшей производной	Пограничный слой
Метод пограничного слоя	Задачи с тонкими слоями	Старшей производной	Составное решение
Метод многих масштабов	Нелинейные колебания	Нелинейном члене	Устраняет секулярные члены

12. Обсуждение результатов

Проведённое исследование подтверждает высокую эффективность методов возмущений как аналитического инструмента прикладной математики. Рассмотренный пример с квадратным уравнением наглядно демонстрирует основную идею метода: сложная задача заменяется последовательностью простых линейных задач, решение которых позволяет строить приближённые формулы с контролируемой точностью.

Важным результатом вычислительного эксперимента является подтверждение теоретической оценки $\Delta = O(\varepsilon^3)$: данные таблицы 1 показывают, что отношение Δ/ε^3 остаётся ограниченным при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что каждый дополнительный учтённый член разложения увеличивает порядок точности на единицу.

Сравнение регулярных и сингулярных возмущений показывает принципиальное различие этих классов задач. В регулярном случае метод даёт единое разложение, равномерно пригодное на всей области. В сингулярном случае стандартное разложение неприменимо вблизи пограничного слоя, и требуется специальный анализ с введением растянутых переменных.

Метод многих масштабов решает проблему секулярных членов, возникающую при анализе нелинейных колебательных систем. Физически это отражает тот факт, что слабая нелинейность не изменяет амплитуду колебаний на коротких временах, но смещает частоту и может приводить к медленному изменению огибающей на временах $t \sim 1/\varepsilon$.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются: применение рассмотренных методов к частным дифференциальным уравнениям математической физики; исследование сходимости асимптотических рядов методами борелевского суммирования; численно-аналитические комбинированные методы, сочетающие асимптотику с методами Рунге–Кутта или конечных элементов.

Заключение

В настоящей работе проведено систематическое исследование методов возмущений как инструмента аналитического решения задач прикладной математики. Получены следующие основные результаты:

1. изложены теоретические основы асимптотических разложений и условия применимости метода возмущений;

2. построены асимптотические разложения второго порядка для обоих корней возмущённого квадратного уравнения; результаты полностью подтверждены точным решением;

3. проведён вычислительный эксперимент, подтверждающий оценку погрешности $\Delta = O(\varepsilon^3)$ и высокую точность метода при $\varepsilon \leq 0.10$;

4. исследованы регулярные возмущения на примере нелинейного уравнения Бернулли и построено явное асимптотическое решение второго порядка;

5. рассмотрен класс сингулярно возмущённых задач; объяснен механизм возникновения пограничных слоёв и потери граничных условий;

6. изложен метод пограничного слоя и построено составное решение, равномерно пригодное на всей области;

7. описан метод многих масштабов, позволяющий строить равномерные разложения для нелинейных колебательных систем без секулярных членов.

Таким образом, методы возмущений представляют собой мощный аналитический инструмент, позволяющий получать ценную информацию о поведении математических моделей даже там, где точное решение принципиально недоступно. Они органично дополняют численные

методы, обеспечивая качественное понимание физических закономерностей и аналитические оценки для проверки численных результатов.

Список литературы

1. Найфэ А. Методы возмущений. — М.: Мир, 1976. — 455 с.
2. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967. — 311 с.
3. Хинч Э. Прикладные методы возмущений. — М.: Мир, 1987. — 264 с.
4. Kevorkian J., Cole J.D. Multiple Scale and Singular Perturbation Methods. — New York: Springer, 1996. — 632 p.
5. Holmes M.H. Introduction to Perturbation Methods. 2nd ed. — New York: Springer, 2013. — 436 p.
6. Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. — New York: Wiley, 1981. — 519 p.
7. Бойс У., ДиПрима Р. Дифференциальные уравнения и задачи на граничные значения. — М.: Вильямс, 2010. — 1024 с.
8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985. — 231 с.