Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

PIFAGOR TEOREMASINING ICHKI DOIRA VA TANGENT SEGMENTLAR ORQALI ISBOTI HAMDA BOSHQA GEOMETRIK USULLAR

Qaxxarov Akmal

Shahrisabz “Temurbeklar maktabi’’

Harbiy-akademik litseyi Matematika fani o‘qituvchi**si**

Gulmurodov Alibek

2-kurs o‘quvchisi

Kalit so'zlar: Pifagor teoremasi, ichki doira, tangent segment, to‘g‘ri burchakli uchburchak, geometrik isbot, Fales teoremasi, **incircle** radiusi

Kirish:

Pifagor teoremasi - matematika tarixining eng mashhur va ko'p isbotlangan teoremasidan biridir. Miloddan avvalgi VI asrda yunon faylasufi Pifagor tomonidan shakllantirilgan bu teorema hozirgi kungacha 370 dan ortiq turli isbot variantiga ega. Isbotlarning bu qadar xilma-xilligi teoremaning matematikaning turli sohalari; algebra, geometriya, trigonometriya va mexanika bilan qanchalik chuqur bog'liqligini ko'rsatadi.

Ushbu maqolani yozishdan maqsad - maktab darsliklarida odatda e‘tibor berilmaydigan, ammo nazariy jihatdan nihoyatda qiziqarli bo'lgan bir isbotni - ichki doira va tangent segmentlar orqali qurilgan geometrik isbotni o'rganish va shu bilan birga boshqa bir necha geometrik usullarni solishtirishdir. Tadqiqot davomida biz chizgan geometrik sxemadan ko'rgazmali vosita sifatida foydalandim.

Mavzuning dolzarbligi shundaki, ko'plab o‘quvchilar Pifagor teoremasi faqat bitta usulda - algebraik ravishda -isbotlanadi deb o'ylaydi. Holbuki, bu teoremaning har biri o‘ziga xos matematik go'zallikka ega bo'lgan o'nlab sof geometrik isbotlari mavjud.

Asosiy tushunchalar va belgilash tizimi

Maqolada quyidagi belgilash tizimidan foydalanamiz:

– ABC — to'g'ri burchakli uchburchak, $B = 90°$;

– $a = BC$, $b = AC$ (katetlar), $c = AB$ (gipotenuza);

– r — ichki doira radiusi;

– O — katta aylananing markazi;

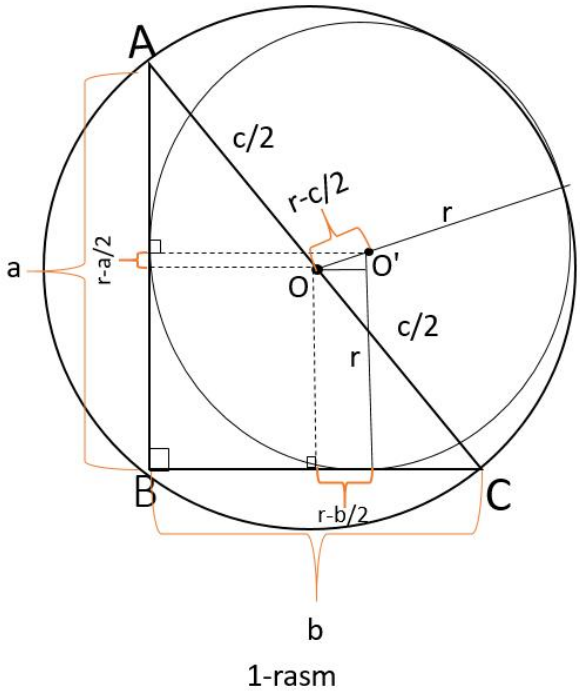
– $O‘$ — ichki doiraning markazi ; x — ichki doira radiusi.

Tangent segment deganda tashqi nuqtadan doiraga o‘tkazilgan urinma kesmaning uzunligi tushuniladi. Quyida biz tangent segmentlarning asosiy xossasidan faol foydalanamiz.

Isboti: Doira markazi I dan urinma nuqtalariga tushirilgan radiuslar urinmalarga perpendikulyar. Hosil bo'lgan to‘g‘ri burchakli uchburchaklarda umumiy gipotenuza (nuqtadan markazgacha) va teng katetlar (radiuslar) bor. Demak, qolgan katetlar — tangent segmentlar — ham teng.

Geometrik chizma va uning tahlili

Quyidagi chizma (1-rasm) ushbu maqolaning asosiy ko'rgazmali vositasidir. Chizmada ABC to'g'ri burchakli uchburchak, unga tashqi chizilgan O markazli katta aylana va uchburchakka ichki chizilgan O‘ markazli kichik aylana bir vaqtda ko'rsatilgan.



1-rasm

O→ *katta aylana markazi.*
ABC →O markazli aylanaga ichki chizilgan to‘g‘ri burchakli uchburchak .
O'→ABC uchburchak katetlari hamda O markazli aylanaga urunuvchi aylana markazi.

1-rasm. ABC to‘g‘ri burchakli uchburchak, tashqi aylana (O markazi) va ichki aylana (O‘ markazi) konfiguratsiyasi

Chizmadan ko‘rinadiki, O markazi gipotenuza AC ning o'rtasida joylashgan — bu Falès teoremasi natijasi. O‘ markazi esa uchburchakning bisektrisalari kesishgan nuqtada, uchala tomondan teng masofada. Chizmadagi kichik to‘g‘ri burchakli uchburchak ($x-\frac{a}{2}$, $x-\frac{b}{2}$, $x-\frac{c}{2}$ katetlari bilan) O va O' markazlari o'rtasidagi masofani Pifagor teoremasi yordamida ifodalashga yordam beradi.

Ichki doira va tangent segmentlar orqali isbot

Bu bo'limda Pifagor teoremasini $a^2+b^2=c^2$ ko'rinishida ichki doira xossalari yordamida isbotlaymiz.

Ichki doira radiusining formulasi

ABC to'g'ri burchakli uchburchakda ($B = 90°$) ichki doira AB, BC va AC tomonlariga tegib tursin. Urinish nuqtalari tangent segmentlarga bo'lib turadi. Tangent segmentlar teoremasi bo'yicha:

– B uchidan AB va BC ga: uzunlik r (to'g'ri burchakda doira markazidan har katetga masofa r ga teng);

– A uchidan: uzunlik $(b - r)$;

– C uchidan: uzunlik $(a - r)$.

Gipotenuza bu segmentlar yig'indisidan iborat:

$$c = (b - r) + (a - r) = a + b - 2r$$

Bundan ichki doira radiusi formulasi kelib chiqadi:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

Pifagor teoremasi isboti

(1) formuladan: $a + b = c + 2r$. Ikkala tomonni kvadratlaymiz:

$$(a + b)^2 = (c + 2r)^2$$

Yoyamiz:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4cr + 4r^2$$

To'g'ri burchakli uchburchak yuzasini ikkita usul bilan ifodalab, tenglashtirramiz. Birinchi usul: $S = \frac{ab}{2}$. Ikkinchi usul: $S = r \cdot p$, bu yerda $p = \frac{a+b+c}{2}$ yarim perimetr. Demak:

$$\frac{a \cdot b}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} \Longrightarrow ab = r(a+b+c)$$

(1) formuladan $r = \frac{a+b-c}{2}$ ni qo'yamiz:

$$ab = \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2}$$

Demak: $2ab = (a+b)^2 - c^2$, ya'ni $4cr + 4r^2 = 2ab$. Yuqoridagi tenglamaga qaytamiz:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

• Pifagor teoremasi faqat tangent segmentlar teoremasi va uchburchak yuzasi formulasi yordamida isbotlandi. Isbot davomida hech qanday koordinata, trigonometriya yoki o'xshash uchburchakdan foydalanilmadi — bu isbotni sof geometrik qiladi.

Pifagor teoremasi isbotlarining boshqa geometrik usullari

.Eyklidning maydon usuli (miloddan avvalgi III asr)

Bu usulda gipotenuza ustidagi katta kvadrat yuzasi ikkita kichik kvadrat yuzalari yig'indisiga teng ekanligi isbotlanadi. Eykling o'zining “Boshlanmalar” (“Elements”) asarining I kitobidagi 47-teoremada parallelogramm va uchburchak maydon munosabatlaridan foydalanib, hech qanday son ishlatmasdan sof geometrik isbot keltirgan [2]. Bu isbot ikki ming yil davomida maktab geometriyasining poydevori bo'lib keldi.

Prezident Garfild isboti (1876-yil)

Ushbu isbot AQShning keyinchalik 20-prezidenti bo'lgan Jeyms Garfild tomonidan Kongress majlisida topilgan. Ikkita kongruent to‘g‘ri burchakli uchburchak va ular orasidagi teng yonli

uchburchakdan hosil bo'lgan trapetsiya yuzasini ikkita usul bilan hisoblash orqali $a^2 + b^2 = c^2$ kelib chiqadi . Isbot «New England Journal of Education» jurnalida 1876-yilda e'lon qilingan.

O'xshash uchburchaklar usuli

To'g'ri burchakli uchburchakda to'g'ri burchakdan gipotenzaga balandlik tushirilsa, hosil bo'lgan ikkita kichik uchburchak asl uchburchakka va bir-biriga o'xshash bo'ladi. O'xshash uchburchaklar tomonlari nisbatlarining tengligidan bir necha qadam orqali Pifagor teoremasi chiqariladi [4]. Bu usul eng qisqa isbot hisoblanadi va isbotda Euklid maydon tushunchasi ham talab etilmaydi.

Xulosa

Ushbu maqolada quyidagi natijalar olindi:

- To‘g‘ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan doira radiusi $r=\frac{a+b-c}{2}$ ekanligi tangent segmentlar yordamida isbotlandi;
- Bu formula va uchburchak yuzasi munosabatidan foydalanib, $a^2+b^2=c^2$ ko'rinishidagi Pifagor teoremasi sof geometrik usulda isbotlandi;
- Eykling, Garfild va o'xshash uchburchaklar usullari taqqoslandi;
- Geometrik chizma yordamida ikkala aylana va uchburchak o'rtasidagi munosabat ko'rgazmali tarzda taqdim etildi.

Olingan natijalar Pifagor teoremasi bilan ichki doira xossalari o'rtasidagi chuqur bog'liqlikni ko'rsatadi. Bu mavzu kelajakda trigonometrik funksiyalar va analitik geometriya sohasiga kengaytirish uchun qulay zamin hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Evklid. *Elementlar*. I kitob,.
2. Prasolov V.V. *Tekislik geometriyasi masalalari*.
3. Loomis E.S. *Pifagor teoremasi haqida*.
4. Atanasyan L.S., Butuzov V.F. va boshqalar. *Geometriya. 10-11-sinflar uchun darslik*..
5. Coxeter H.S.M., Greitzer S.L. *Geometriyaga qaytish*.