Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

PROYEKTIV GEOMETRIYANING BAZI TUSHUNCHALARINI MAKTAB GEOMETRIYA KURSIGA TADBIQI

Sobirov Jasur Azamatovich

Navoiy davlat universiteti, Matematika kafedrasi katta o'qituvchisi

Jumayev Sanjar Saydullayevich

Navoiy davlat universiteti, Matematika kafedrasi katta o'qituvchisi

Begmurodov Otabek Axmadovich

Navoiy davlat universiteti, Matematika kafedrasi katta o'qituvchisi

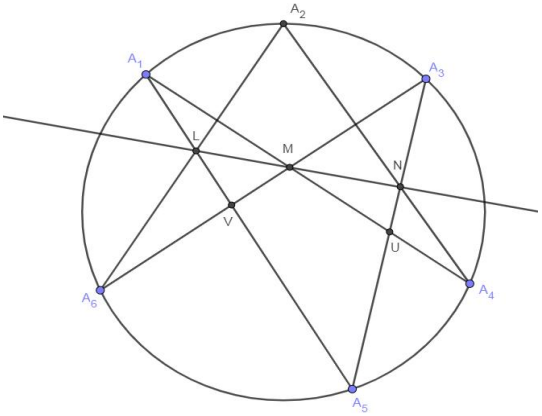
Annotatsiya: Ushbu maqolada proyektiv geometriya tushunchalaridan foydalanib xalqaro matematik olimpiadalarda tushgan ayrim geometrik masalalarni yechishga qaratilgan. Maqolada olimpiadaga tayyorlanayotgan o'quvchilarning geometriya fanidagi bilimlar bazasini kengaytirish maqsadida ba'zi masalalar ko'rsatib berilgan.

Kalit so'zlar: proyektiv geometriya, proyektiv almashtirish,to'rtta nuqtaning murakkab nisbati, aylana, to'g'ri chiziq, kesma.

Proyektiv geometriya figuralarning proyektiv almashtirish natijasida o'zgarmaydigan xossalarini o'rganadi. Bunday xossalar proyektiv xossalar deyiladi. Proyektiv almashtirishlar to'g'ri chiziqni to'g'ri chiziqqa o'tkazuvchi almashtirishlardan iborat. Bir to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtalar proyektiv almashtirish natijasida yana bir to'g'ri chiziqda yotuvchi nuqtalarga, ikkinchi tartibli chiziqlar ikkinchi tartibli chiziqlarga o'tadi.

1-teorema: Agar C aylanaga ichki chizilgan $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ olti burchakda. A_1A_4 va A_3A_6 to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqta M, A_3A_5 va A_2A_4 to'g'ri chiziqlar kesishgan nuqta N, A_2A_6 va A_1A_5 to'g'ri chiziqlar keshishgan nuqtasi L bulsa. Bu uchta nuqta bitta to'g'ri chiziqda yotadi.

Isbot: A_1A_4 va A_3A_5 to'g'ri chiziqlarni kesishgan nuqtasi U, A_1A_5 va A_3A_6 to'g'ri chiziqlarni kesishgan nuqtasi V bo'lsin u holda A_4 markazga ko'ra A_4A_1,A_4A_2,A_4A_3,A_4A_5 to'g'ri chiziqlarni A_3A_5 to'g'ri chiziqdagi U,N,A_3,A_5 nuqtalarga mos ravishda perspektiv akslantiradi. A_6 markazga ko'ra A_6A_1,A_6A_2,A_6A_3,A_6A_5 to'g'ri chiziqlarni A_1A_6 to'g'ri chiziqdagi A_1,L,V,A_5 nuqtalarga mos ravishda perspektiv akslantiradi. 1-lemmaga ko'ra U,N,A_3,A_5 nuqtalar A_1,L,V,A_5 nuqtalarga proyektiv akslanadi. Ushbu perspektiv akslantirishga ko'ra A_1U, LN, A_3V to'g'ri chiziqlar bitta M nuqtadan o'tadi (rasm1).



Rasm 1

Yuqoridagi teoremani qo'llab quydagi masalani yechamiz.

Masala 1: P $\angle APB-\angle ACB=\angle APC-\angle ABC$ shartni qanoatlantiruvchi ΔABC uchburchakning ichidan olingan nuqta bo'lsin. D va E nuqtalar mos ravishda ΔAPB va ΔAPC uchburchaklarning bissektrisalari kesishgan nuqta bo'lsa, AP,BD,CE to'g'ri chiziqlar bitta nuqtada kesishishini isbotlang.

Yechish: ΔABC uchburchakka G tashqi aylana chizamiz va AP,BP,CP to'g'ri chiziqlarni G aylana bilan kesishgan nuqtalarini mos ravishda M,K,L deb olamiz (rasm2). Shunda

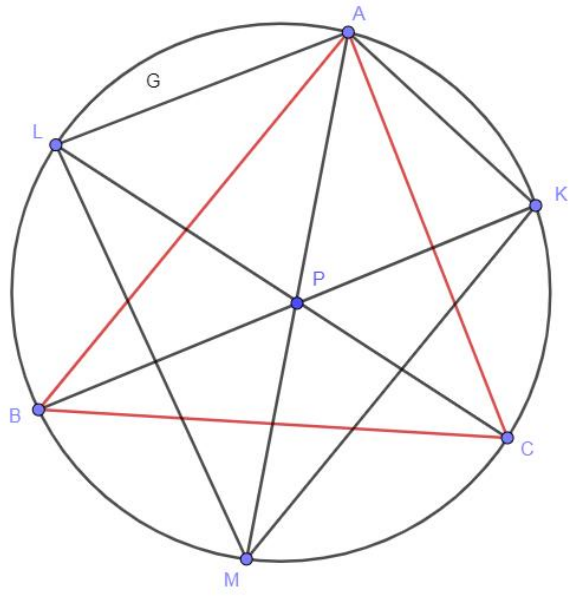
$$\angle APB=\angle KPM=\angle PKA+\angle PAK=\angle MAK+\angle BKA=\angle MAK+\angle ACB$$

$$\angle APC=\angle LPM=\angle PLA+\angle PAL=\angle CBA+\angle MAL$$

$$\angle APB-\angle ACB=\angle MAK$$

$$\angle APC-\angle ABC=\angle MAL$$

Bundan $ML=MK$ kelib chiqadi chizma.



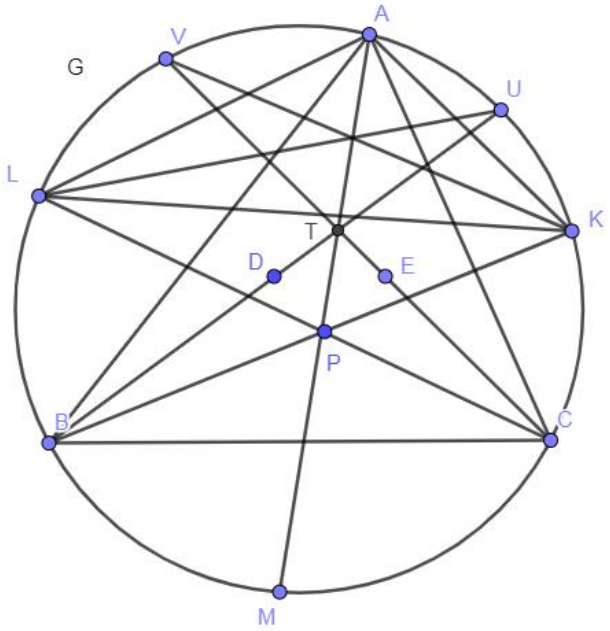
Rasm 2

BD va CE to'gri chiziqlarni G aylana bilan kesishgan nuqtalari mos ravishda U va V deylik. BD va CE bissektirisalar bo'lgani uchun

$$\angle ACV=\angle VCL,\ \angle ABU=\angle UBK$$

Bo'ladi.

Endi ΔALK uchburchakga qaraylik, KV va LU chiziqlarning kesishgan nuqtasi AM to'g'ri chiziqda yotadi. Sababi U nuqta $\overset{\frown}{AK}$ yoyning o'rtasi, V nuqta $\overset{\frown}{AL}$ yoyning o'rtasi shunda KV va LU chiziqlar ΔALK uchburchakning K va L uchlarining bissektrisasi bo'ladi. Yuqorida $ML=MK$ ekanligini topgandik, demak AM to'g'ri chiziq ΔALK uchburchakning A uchining bissektrisasi. Uchburchakning bissektrisalari bitta nuqtada kesishadi (chizma3).



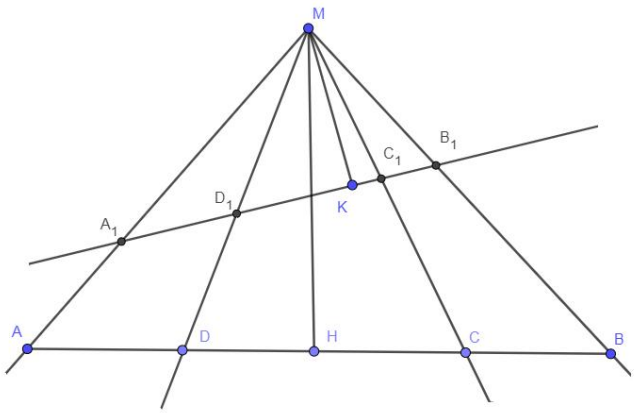
Rasm 3

CKUVLB olti burchakka qarasak yuqoridagi teorema 1 ga ko'ra *LU* va *VK* to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi *S*, *BK* va *LC* chiziqlarning kesishgan nuqtasi *P* hamda *BU* va *VC* to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi *T* bitta to'g'ri chiziqda yotadi. Demak *AP*,*BD*,*CE* to'g'ri chiziqlar bitta *T* nuqtada kesishadi.

Ta'rif: Tekislikda ikkita l_1 va l_2 to'g'ri chiziq va bu to'g'ri chiziqlarda yotmaydigan *M* nuqta berilgan bo'lsin. l_1 to'g'ri chiziqda ixtiyoriy *A* nuqtani olib, uni *M* nuqta bilan tutashtiramiz, hosil bo'lgan to'g'ri chiziq ikkinchi to'g'ri chiziqni mos ravishda A_1 nuqtada kesadi. A_1 nuqta *A* nuqtaning markaziy proyeksiyasi diyeladi chizma.

2-teorema: Markaziy proyeksiyalashda to'rtta nuqtaning murakkab nisbati o'zgarmaydi.

Isbot: l_1 to'g'ri chiziqdagi nuqtalar *A*,*B*,*C*,*D* bo'lsa, Markaziy proyeksiyalashda l_2 to'g'ri chiziqda ularga mos nuqtalar A_1,B_1,C_1,D_1 bo'lsin (rasm4).



Rasm 4

Teoremani isbotlash uchun M nuqtadan l_1 to'g'ri chiziqqa MH perpendikliyar o'tkazamiz. Keyin A,B,C,D nuqtalarning murakkab nisbati quydagiga teng bo'ladi.

$$(AB;CD)=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AD}{BD}}=\frac{\frac{\frac{1}{2}MH*\ AC}{\frac{1}{2}MH*\ BC}}{\frac{\frac{1}{2}MH*\ AD}{\frac{1}{2}MH*\ BD}}=\frac{\frac{S_{MAC}}{S_{MBC}}}{\frac{S_{MAD}}{S_{MBD}}}=\frac{\frac{\frac{1}{2}MA*\ MC*\ sin(\angle AMC)}{\frac{1}{2}MB*\ MC*\ \sin(\angle BMC)}}{\frac{\frac{1}{2}MA*\ MD*\ \sin(\angle AMD)}{\frac{1}{2}MB*\ MD*\ \sin(\angle BMD)}}=\frac{\frac{sin(\angle AMC)}{\sin(\angle BMC)}}{\frac{\sin(\angle AMD)}{\sin(\angle BMD)}}$$

To'rta nuqtaning murakkab nisbati uchun quydagi natijani oldik

$$(AB;CD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{\sin(\angle AMC)}{\sin(\angle BMC)}:\frac{\sin(\angle AMD)}{\sin(\angle BMD)}$$

Endi M nuqtadan l_2 to'g'ri chiziqqa MK perpendikliyar o'tkazib yuqoridagi hisob kitoblarni takrorlasak A_1,B_1,C_1,D_1 nuqtalarni murakkab nisbati uchun quydagi natijani olamiz.

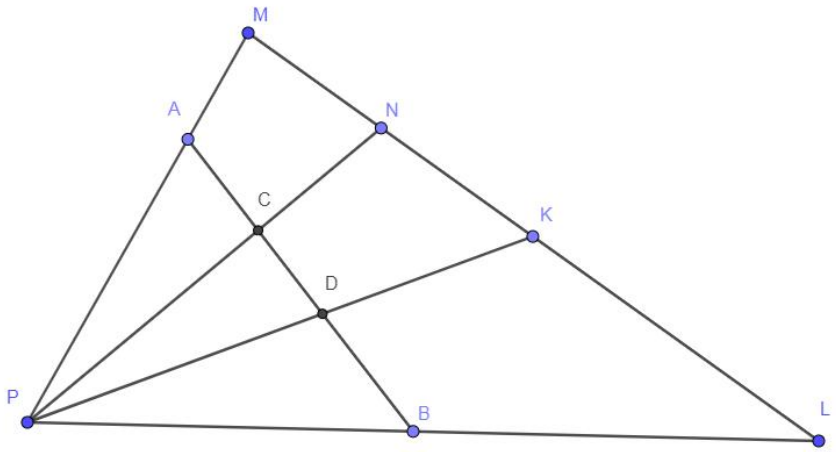
$$(A_1B_1;C_1D_1)=\frac{A_1C_1}{B_1C_1}:\frac{A_1D_1}{B_1D_1}=\frac{sin(\angle AMC)}{\sin(\angle BMC)}:\frac{\sin(\angle AMD)}{\sin(\angle BMD)}$$

Demak bundan

$$(AB;CD)=(A_1B_1;C_1D_1)$$

Bo'lishi kelib chiqadi.

Masala 2: Quydagi chizmadan KL ni toping: Bu yerda $AC=2$, $CD=1$, $DB=3$, $MN=3$, $NK=2$. (rasm5)



Rasm 5

Yechish: Yuqoridagi teoremaga ko'ra

$$(AB;CD)=(ML;NK)$$

$$\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}=\frac{MN}{NL}:\frac{MK}{KL}$$

Bo'ladi.

Demak

$$\frac{2}{4}:\frac{3}{3}=\frac{3}{2+KL}:\frac{5}{KL}$$

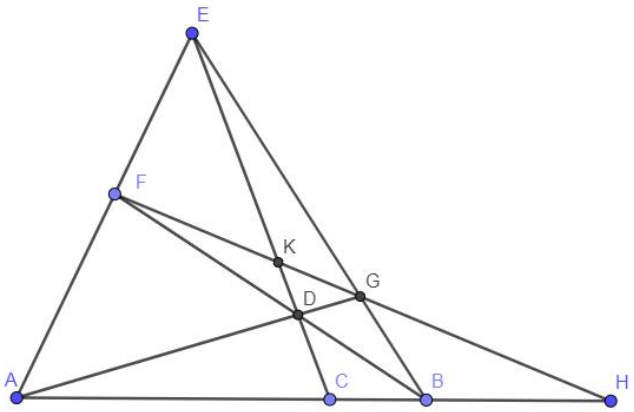
bundan

$$HI=10$$

degan javob chiqadi.

Masala 3: C nuqta AB kesmadagi biror nuqta bo'lib D va E nuqtalar AB to'g'ri chiziqda yotmasin. D,C va E nuqtalar bir to'g'ri chiziqdagi nuqtalar bo'lib D nuqta ΔABE uchburchakning ichki nuqtasi bo'lsin. BD bilan AE ning kesishgan nuqtasi F, AD bilan BE ning kesishgan nuqtasi G, FG bilan AB ning kesishgan nuqtasi H bo'lsa, $\frac{CA}{CB}=\frac{HA}{HB}$ ekanligini isbotlang.

Yechish: Masala shartiga mos chizmani chizib olaylik,



Rasm 6

Agar biz FG to'g'ri chiziq bilan EG to'g'ri chiziqni kesishgan nuqtasini K deb olsak (rasm6) va yuqoridagi ikkinchi teoremani qo'llasak. Ya'ni E nuqtaga ko'ra AH to'g'ri chiziqdagi A,C,B,H nuqtalarning markaziy proyeksiyalashdagi obrazlari mos ravishda FH to'g'ri chiziqdagi F,K,G,H nuqtalar bo'lsin.

Bundan ko'rinadiki

$$(AB;CH)=(FG;KH)$$

bo'ladi.

Endi D nuqtaga ko'ra FH to'g'ri chiziqdagi F,K,G,H nuqtalarning markaziy proyeksiyalashdagi obrazlari mos ravishda AH to'g'ri chiziqdagi B,C,A,H nuqtalar bo'lsin.

Bundan esa

$$(FG;KH)=(BA;CH)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Demak

$$(AB;CH)=(BA;CH)$$

$$\frac{CA}{CB}:\frac{HA}{HB}=\frac{CB}{CA}:\frac{HB}{HA}$$

Bo'ladi.

Yuqoridagi tenglikdan

$$\frac{CA}{CB}:\frac{HA}{HB}=1$$

ekanligini ko'rish mumkin.

Bundan esa

$$\frac{CA}{CB}=\frac{HA}{HB}$$

tenglikni olamiz.

Adabiyotlar

1. A.Y.Narmanov, A.C.Sharipov "Geometriya asoslari" Toshkent,2004.
2. N.Dodajonov, R Yunusmetov, T.Abdullayev "geometriya" 2-qism Toshkent "O'qituvchi", 1988