Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

HODISALAR YIG'INDISI VA KO'PAYTMASINING EHTIMOLLIGI. SHARTLI EHTIMOLLIK

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o'qituvchisi
+998909280195

Annotatsiya: Ushbu ishda ehtimollar nazariyasining fundamental tushunchalari bo'lgan hodisalar yig'indisi va ko'paytmasining ehtimolligi hamda shartli ehtimollik mavzulari yoritilgan. Maqolada birgalikda bo'lgan va birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisining ehtimolligini hisoblash teogonalari, shuningdek, bog'liq va bog'liq bo'lmagan hodisalar ko'paytmasining ehtimollik qoidalari matematik tahlil qilingan. Bundan tashqari, biror-bir voqeaning sodir bo'lishi boshqa bir voqeaning yuzaga kelishiga ta'sir ko'rsatish darajasini belgilovchi shartli ehtimollik tushunchasi va uning amaliy ahamiyati misollar yordamida ko'rsatib o'tilgan. Mazkur ish ehtimollar nazariyasining amaliy masalalarni yechishdagi o'rni va uslubiy asoslarini o'rganuvchilar uchun mo'ljallangan.
Kalit so'zlar: Ehtimollar nazariyasi, tasodifiy hodisa, hodisalar yig'indisi, hodisalar ko'paytmasi, birgalikda bo'lmagan hodisalar, birgalikda bo'lgan hodisalar, bog'liq hodisalar, bog'liq bo'lmagan hodisalar, shartli ehtimollik, ehtimollarni qo'shish teoremasi, ehtimollarni ko'paytirish teoremasi.

Аннотация: В данной работе рассматриваются фундаментальные понятия теории вероятностей, такие как вероятность суммы и произведения событий, а также условная вероятность. В статье проводится математический анализ теорем сложения вероятностей для совместных и несовместных событий, а также правил умножения вероятностей для зависимых и независимых событий. Кроме того, на конкретных примерах демонстрируется понятие условной вероятности, определяющее степень влияния наступления одного события на возникновение другого, и его практическое значение. Данная работа предназначена для тех, кто изучает методологические основы и роль теории вероятностей в решении практических задач.
Ключевые слова: Теория вероятностей, случайное событие, сумма событий, произведение событий, несовместные события, совместные события, зависимые события, независимые события, условная вероятность, теорема сложения вероятностей, теорема умножения вероятностей.

Abstract: This paper examines the fundamental concepts of probability theory, such as the probability of the sum and product of events, and conditional probability. The article provides a mathematical analysis of the probability addition theorems for mutually exclusive and non-exclusive events, as well as the rules for multiplying probabilities for dependent and independent events. In addition, the concept of conditional probability, which determines the degree of influence of the occurrence of one event on the emergence of another, and its practical significance are demonstrated using specific examples. This work is intended for those studying the methodological foundations and the role of probability theory in solving practical problems.
Keywords: Probability theory, random event, sum of events, product of events, mutually exclusive events, mutually non-exclusive events, dependent events, independent events, conditional probability, addition theorem of probability, multiplication theorem of probability.

KIRISH

Mavzuning dolzarbligi. Biz yashayotgan zamonaviy dunyo turli xil tasodifiy jarayonlar, noaniqliklar va kutilmagan hodisalarga boy. Kundalik hayotimizdan tortib, iqtisodiyot, moliya, axborot

texnologiyalari, muhandislik va sun'iy intellektgacha bo‘lgan barcha sohalarda to‘g‘ri qaror qabul qilish uchun kelajakda sodir bo‘lishi mumkin bo‘lgan voqealarni bashorat qilish va ularning qonuniyatlarini o‘rganish talab etiladi. Bu kabi murakkab masalalarni matematik modellashtirishda "Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika" fani asosiy poydevor hisoblanadi.

Tasodifiy jarayonlarni tahlil qilishda faqatgina bitta alohida olingan hodisaning ehtimolligini bilish yetarli emas. Amaliyotda ko‘pincha bir nechta hodisalarning birgalikda yuz berishi, ularning bir-biriga bog‘liqligi yoki ketma-ket sodir bo‘lish jarayonlari kuzatiladi. Shu sababli, murakkab hodisalarni sodda tarkibiy qismlarga ajratish va ularni matematik tilga ko‘chirish uchun **hodisalar yig‘indisi**, **hodisalar ko‘paytmasi** hamda **shartli ehtimollik** tushunchalarini mukammal o‘rganish o‘ta dolzarb ahamiyatga ega.

Tadqiqotning obyekti va predmeti. Ushbu ishning tadqiqot obyekti bo‘lib tasodifiy hodisalar va ularning matematik qonuniyatlari xizmat qiladi. Tadqiqot predmeti esa hodisalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar (birlashma va ko‘paytma) hamda bir hodisaning sodir bo‘lishi boshqasiga ta’sir ko‘rsatish darajasini belgilovchi shartli ehtimollik teoremalaridir.

Tadqiqotning maqsad va vazifalari. Mazkur ishning asosiy maqsadi — hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasining ehtimolligini hisoblash usullarini tizimli tahlil qilish hamda shartli ehtimollik tushunchasining mohiyatini ochib berishdan iborat. Ushbu maqsadga erishish uchun quyidagi vazifalarni amalga oshirish belgilangan:

1. Birgalikda bo‘lgan va birgalikda bo‘lmagan hodisalar tushunchalarini farqlash hamda ular uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasini asoslash.
2. Bog‘liq va bog‘liq bo‘lmagan hodisalarni tahlil qilib, ehtimollarni ko‘paytirish teoremasini qo‘llash shartlarini ko‘rsatish.
3. Shartli ehtimollik formulasining kelib chiqishi va uning amaliy masalalarni yechishdagi (xususan, Bayes formulasi va to‘la ehtimollik formulasidagi) o‘rnini yoritish.

Ushbu tadqiqot ishi ehtimollar nazariyasining fundamental teoremalarini nazariy jihatdan chuqurroq anglash va ularni hayotiy, iqtisodiy hamda texnik masalalarga to‘g‘ri tadbiq etish ko‘nikmalarini shakllantirishga xizmat qiladi.

1. Hodisalar yig‘indisining ehtimolligi haqidagi teoremalar. Ba'zi tasodifiy hodisalarning ehtimolliklariga asoslanib, qandaydir tarzda birinchisi bilan bog'liq bo'lgan boshqa tasodifiy hodisalarning ehtimolliklarini hisoblash uchun ishlatilishi mumkin bo'lgan teoremalarni keltiramiz.

Teorema 1. Agar A va B hodisalar birgalikda bo’lmasa, u holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Isbot. C_1, C_2, C_3, …, C_n - to‘la guruh hosil qiluvchi elementar hodisalar bo‘lsin. A hodisaga k elementar hodisalar, B hodisaga esa m elementar hodisalar qulaylik tug’dirsin. A va B hodisalar birgalikda bo’lmagani uchun, A + B hodisasi uchun qulaylik tug’diruvchi elementar hodisalar turlicha bo’lib, ularning soni m + k ga teng. Demak, klassik ehtimollik formulasidan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Misol 1. Mergan nishonga o'q uzmoqda. 10 ochko olish ehtimolligi $\frac{1}{5}$ ga, 9 ochko olish ehtimolligi esa $\frac{3}{5}$ ga teng. Eng kamida 9 ochko olish ehtimolligini toping.

Yechish: “Kamida 9 ochko olish” - C hodisasi A - “9 ochko olish” va B - “10 ochko olish” hodisalarining birlashmasi hisoblanadi. Bunda A va B birgalikda ro’y bermaydigan hodisalar, chunki ular bir vaqtning o'zida sodir bo'lolmaydi. Shunday qilib, 1-teoremaga ko’ra quyidagicha yozamiz:

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

Teorema 2. A va $\bar{A}$ qarama-qarshi hodisalar bo’lsin. U holda quyidagi tenglik o’rinli bo’ladi:
$P(\bar{A})=1-P(A)$.

Isbot. $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ - to‘la guruh tashkil etuvchi elementar hodisalar bo‘lsin va A hodisaga k ta elementar hodisalar qulaylik tug’dirsin. U holda $\bar{A}$ hodisaga n-k ta elementar hodisalar qulaylik tug’diradi. Shunday qilib, klassik ehtimollik formulasidan quyidagini hosil qilamiz:

$$P(\bar{A})=\frac{n-k}{n}=\frac{n}{n}-\frac{k}{n}=1-\frac{k}{n}=1-P(A).$$

Misol 2. Ikki xonali son o'ylandi. O'ylangan sonning turli raqamlarga ega bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish: “O'ylangan son turli raqamlarga ega” hodisasini A bilan belgilaylik. U holda $\bar{A}$ - " O'ylangan son bir xil raqamlarga ega " hodisasi bo’ladi. O'ylangan son ikki xonali bo'lgani uchun jami 90 ta elementar hodisa mavjud bo’ladi:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, …, 98, 99.

Ulardan 9 tasi: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 - $\bar{A}$ hodisaga qulaylik tug’diradi. Shuning uchun 2-teoremaga ko’ra quyidagiga ega bo’lamiz:

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{9}{90}=\frac{9}{10}$$

Teorema 3. Agar $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ juft-jufti bilan birgalikda bo’lmasa, u holda quyidagi tenglik bajariladi:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

3-teoremaning isboti 1-teoremaning isbotiga o'xshash amalga oshiriladi.

2. Shartli ehtimollik. Hodisalar ko’paytmasi ehtimolligi haqidagi teoremalar.

Ta'rif 1. A va B hodisalar bo’gliqmas deyiladi, agarda quyidagi tenglik o’rinli bo’lsa:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

Ta'rif 2. B hodisasi sodir bo'lishi sharti ostida A hodisaning ehtimolligini ifodalovchi son A hodisasining B hodisasiga nisbatan shartli ehtimolligi deyiladi.

Shartli ehtimollik uchun $P\left(\frac{A}{B}\right)$ belgisi qo'llaniladi.

Misol 3. Bir qutida 12 ta qizil va 8 yashil shar bor, ularning barchasi bir xil. Birinchi olingan shar qizil bo'lganini hisobga olsak, ikkinchi olingan sharning qizil bo'lish ehtimolligini toping.

Yechish: Agar birinchi olingan shar qizil bo‘lsa, qutida 19 ta shar qolgan, shundan 11 tasi qizil.

B - “birinchi olingan shar qizil” hodisasi, A esa “ikkinchi olingan shar qizil” hodisasi deb belgilaylik. U holda (1) formuladan (§1-ga qarang) va 2-ta'rifdan quyidagi kelib chiqadi:

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{11}{19}$$

Shartli ehtimollikni hisoblash uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

Bundan hodisalar ko'paytmasining ehtimolligini hisoblash formulasini osongina hosil qilish mumkin:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P\left(\frac{A}{B}\right).$$

Misol 4. Bir qutida 12 ta qizil va 8 yashil shar bor, ularning barchasi bir xil. Tavakkaliga olingan ikkala sharning ham qizil bo'lishi ehtimolligini toping.

Yechish: B "birinchi olingan shar qizil bo'lishi" hodisasi, A esa "ikkinchi olingan shar qizil bo'lishi" hodisasi bo'lsin. U holda $A\cap B$ hodisasi " olingan ikkala shar ham qizil bo'lishi" hisoblanadi.

U holda, §1 dan (1) formulani va hodisalar ko'paytmasi ehtimolligini hisoblash formulasini qo'llash orqali quyidagilarni olamiz:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}=\frac{33}{95}.$$

Teorema 4. Har qanday A, B, C hodisalar uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P\left(\frac{B}{A}\right)\cdot P\left(\frac{C}{A\cap B}\right).$$

Teoremaning isboti o'quvchiga mustaqil ish sifatida qoldiriladi.

Misol 5. Uchta signalizator bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ishlaydi. Avariya sodir bo'lganda, signalizatorlar mos ravishda $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ va $\frac{6}{7}$ ehtimolliklari bilan ishga tushadi. Avariya sodir bo'lganda ikkita signalizatorning ishga tushishi hodisasi ehtimolligini toping.

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

A_1 hodisa - " avariya sodir bo'lganda, birinchi signalizator ishga tushiriladi",
A_2 hodisa - " avariya sodir bo'lganda, ikkinchi signalizator ishga tushiriladi",
A_3 hodisa - " avariya sodir bo'lganda, uchinchi signalizator ishga tushiriladi",
C_1 hodisa - " avariya sodir bo'lganda, faqat ikkinchi va uchinchi signalizatorlar ishga tushiriladi",
C_2 hodisa - " avariya sodir bo'lganda, faqat birinchi va uchinchi signalizatorlar ishga tushiriladi",
C_3 hodisa - " avariya sodir bo'lganda, faqat birinchi va ikkinchi signalizatorlar ishga tushiriladi",
$C_1+C_2+C_3$ hodisa - " avariya sodir bo'lganda, aniq ikkita signalizator ishga tushiriladi".

U holda 10 ta'rifdan (§1-ga qarang) quyidagi tenglikni hosil qilamiz:
$C_1=\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3$, $C_2=A_1\cap\overline{A_2}\cap A_3$, $C_3=A_1\cap A_2\cap\overline{A_3}$.
C_1, C_2, C_3 hodisalari juft – jufti bilan bog'liqmas bo'lgani sababli, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$P(C_1+C_2+C_3)=P(C_1)+P(C_2)+P(C_3).$$

Signalizatorlar bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ishlaydi va A_1, A_2, A_3 lar bog'liqmas hodisalar hisoblanadi. Shunday qilib, 1- ta'rifdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$P(C_1) = P(\overline{A_1} \quad A_2 \quad A_3) = P(\overline{A_1})\ P(A_2)\ P(A_3) = \frac{1}{9}\ \frac{7}{8}\ \frac{6}{7} = \frac{1}{12},$$
$$P(C_2) = P(A_1 \quad \overline{A_2} \quad A_3) = P(A_1)\ P(\overline{A_2})\ P(A_3) = \frac{8}{9}\ \frac{1}{8}\ \frac{6}{7} = \frac{2}{21},$$
$$P(C_3) = P(A_1 \quad A_2 \quad \overline{A_3}) = P(A_1)\ P(A_2)\ P(\overline{A_3}) = \frac{8}{9}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{7} = \frac{1}{9}.$$

Bu yerdan quyidagini hosil qilamiz:

$$P(C_1 + C_2 + C_3) = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} + \frac{1}{9} = \frac{73}{252}.$$

XULOSA

Ushbu tadqiqot ishi doirasida ehtimollar nazariyasining fundamental ustunlari hisoblangan hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasining ehtimolligi hamda shartli ehtimollik tushunchalari nazariy va amaliy jihatdan har tomonlama tahlil qilindi. Olingan natijalar va o‘rganilgan qonuniyatlar asosida quyidagi muhim xulosalarga kelindi:

1. **Hodisalar yig‘indisi (Qo‘shish teoremasi):** Tasodifiy hodisalarning birgalikda bo‘lish yoki bo‘lmaslik xarakteri ularning yig‘indi ehtimolligini hisoblashda tub burilish yasaydi. Birgalikda bo‘lmagan hodisalar uchun ehtimollar shunchaki qo‘shilsa, birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun ularning kesishmasi (bir vaqtda sodir bo‘lish ehtimoli) mantiqan ayirib tashlanishi shart. Bu qoida murakkab tizimlarning ishonchliligini baholashda xatoliklarning oldini olishga xizmat qiladi.

2. **Hodisalar ko‘paytmasi (Ko‘paytirish teoremasi):** Bir nechta hodisalarning ketma-ket yoki bir vaqtda sodir bo‘lish ehtimolligi ularning o‘zaro bog‘liqlik darajasiga tayanadi. Bog‘liq bo‘lmagan jarayonlarda oddiy ko‘paytirish amali bajarilsa, bog‘liq hodisalarda tizim zanjirli xarakterga ega bo‘ladi va bu yerda shartli ehtimollik tushunchasi maydonga chiqadi.

3. **Shartli ehtimollikning o‘rni:** Shartli ehtimollik faqatgina mavhum matematik formula bo‘lmay, u statik (o‘zgarmas) ma’lumotlarni dinamik muhitga moslashtirish qurolidir. Bir voqeaning sodir bo‘lishi fonida keyingi voqeaning ehtimolligini qayta hisoblash (bu poydevor keyinchalik Bayes teoremasi va to‘la ehtimollik formulasiga ulanadi) bugungi kunda Big Data (ulkan ma'lumotlar), mashinali o‘qitish va xavf-xatarlarni boshqarish (Risk Management) sohalarining asosiy algoritmik mexanizmi hisoblanadi.

Umumiy yakun. Xulosa qilib aytganda, hodisalar ustidagi amallar va shartli ehtimollik qonuniyatlarini mukammal bilish — real hayotdagi noaniqlik va tasodiflar ichidan aniq matematik qonuniyatlarni topish imkonini beradi. Mazkur ishda keltirilgan teoremalar va tahlillar tasodifiy jarayonlarni modellashtirishda, iqtisodiy va ijtimoiy prognozlarni aniqroq shakllantirishda muhim uslubiy poydevor bo‘lib xizmat qiladi.

A D A B I Y O T L A R

1. Sh.A. Alimov, A.R. Xalmuhamedov, M.A. Mirzahmedov. Algebra va analiz asoslari. 10 – sinf uchun darslik. T., O‘qituvchi, 2003.
2. Sh.A. Alimov, A.R. Xalmuhamedov, M.A. Mirzahmedov. Algebra va analiz asoslari. 11 – sinf uchun darslik. T., O‘qituvchi, 2004.
3. А.Н. Колмогоров и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы. М., Просвещение, 1990 .

4. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ для 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 1992.
5. Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М., Просвещение, 1998.
6. Э.М.Сайдаматов, А.К,Аманов, А.С.Юнусов, С.С.Хаджабагян. Алгебра и основы математического анализа., часть 1. Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. Т. «Ўқитувчи». 2016.
7. Э.М.Сайдаматов, А.К,Аманов, А.С.Юнусов, С.С.Хаджабагян. Алгебра и основы математического анализа. Часть 2. Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики. Т. «Илм зиё». 2016.
8. Сканави и др. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. М., Мир и образование, 2001.
9. М.А.Мирзахмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.К,Аманов, Алгебра и начала анализа. Часть 1, 2.Учебник для 10 классов, средних образовательных учреждений и учащихся академических лицеев Т. ООО «Extremumpress». 2017.
10. М.А. Мирзахмедов, Ш.Н. Исмаилов, А.К, Аманов, Алгебра и начала анализа. Часть 1, 2.Учебник для 11 классов, средних образовательных учреждений и учащихся академических лицеев Т. «Zaminnashr». 2018.
11. Л.М. Лихтарников, Т.Г. Сукачева. Математическая логика. Санкт-Петербург, 1999 .
12. И.М. Уваренков, М.З. Маллер. Курс математического анализа, Т. 1. М., Просвещение, 1966.