Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

PLASTINKA HAQIDAGI MASALALARNI SONLI YECHISH

Eshonqulov Adham Botir o‘g‘li
O‘zbekiston Milliy Universiteti
Mexanika va matematik modellashtirish kafedrasi
esonkulovadham557@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada yupqa va o‘rtacha qalinlikdagi elastik plastinkalarning egilishi bilan bog‘liq masalalarni sonli yechishning nazariy va amaliy asoslari tahlil qilinadi. Plastinkalar qurilish konstruksiyalari, mashinasozlik, aviatsiya, kemasozlik va boshqa muhandislik sohalarida keng qo‘llaniladigan yassi konstruktiv elementlardan biri hisoblanadi. Ularning kuchlanish-deformatsiya holatini aniqlashda klassik analitik usullar bilan bir qatorda chekli ayirmalar, chekli elementlar va boshqa sonli usullar muhim ahamiyatga ega. Plastinkaning geometrik o‘lchamlari, qalinligi, elastiklik moduli, Puasson koeffitsiyenti, yuklanish turi hamda chegaraviy shartlari sonli modelning natijalariga bevosita ta’sir ko‘rsatadi [1; 2].

Tadqiqotda Kirchhoff–Love va Reissner–Mindlin plastinka nazariyalari asosida shakllantiriladigan differensial tenglamalarni diskretlashtirish masalalari ko‘rib chiqiladi. Xususan, to‘g‘ri to‘rtburchak plastinkaning bir tekis taqsimlangan yuk ostidagi egilishi uchun biharmonik tenglama, chekli ayirmalar sxemalari va chekli elementlar usulining umumiy xususiyatlari tahlil qilinadi. Sonli yechimning aniqligi to‘r zichligi, chegaraviy shartlarni ifodalash va tanlangan plastinka modeliga bog‘liqligi ko‘rsatiladi [2; 5; 8].

Shuningdek, ilmiy adabiyotlarda keltirilgan hisoblash tajribalari asosida chekli ayirmalar usulining plastinka egilishini hisoblashdagi imkoniyatlari, chekli elementlar usulining murakkab geometriyali konstruksiyalar uchun afzalliklari hamda yupqa va qalin plastinkalar uchun turli nazariyalardan foydalanish zarurati tahlil qilinadi. Tadqiqot natijalari plastinka masalalarini sonli yechishda matematik model, diskretlashtirish, chegaraviy shartlar va natijalarni verifikatsiya qilish bosqichlarini izchil tashkil etish zarurligini ko‘rsatadi.

Kalit so‘zlar: plastinka, elastik plastinka, plastinkaning egilishi, sonli usul, chekli ayirmalar usuli, chekli elementlar usuli, Kirchhoff–Love nazariyasi, Reissner–Mindlin nazariyasi, biharmonik tenglama, chegaraviy shart, deformatsiya, kuchlanish, egilish.

Kirish

Plastinkalar yassi geometrik shaklga ega bo‘lgan va qalinligi boshqa ikki o‘lchamiga nisbatan kichik konstruktiv elementlardir. Ular binolar yopmalari, ko‘prik konstruksiyalari, mashina detallari, samolyot va kema konstruksiyalarida qo‘llanadi. Plastinkaning tashqi yuk ta’siridagi holatini aniqlash masalasi mexanikaning muhim amaliy yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Plastinka nazariyasida asosiy noma’lumlardan biri uning ko‘ndalang yo‘nalishdagi siljishi, ya’ni egilish funksiyasi $w(x,y)$ hisoblanadi [1].

Klassik plastinka nazariyasida yupqa plastinka uchun ko‘ndalang kesimlarning deformatsiyadan keyingi holati bo‘yicha Kirchhoff–Love farazlaridan foydalaniladi. Mazkur nazariya plastinkaning qalinligi uning uzunligi va kengligiga nisbatan kichik bo‘lgan hollarda samarali hisoblanadi. Klassik nazariyada plastinkaning egilish qattiqligi

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

ko‘rinishida ifodalanadi. Bu yerda E — elastiklik moduli, h — plastinka qalinligi, ν — Puasson koeffitsiyenti [1; 2].

Bir tekis taqsimlangan q(x,y)yuk ostidagi izotrop plastinka uchun klassik egilish tenglamasi

$$D\nabla^4 w=q$$

ko‘rinishida yoziladi. Bu tenglama to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama bo‘lib, ∇^4biharmonik operatorni anglatadi [1; 2]. Mazkur tenglamani analitik usulda yechish faqat ayrim sodda geometriya va chegaraviy shartlar uchun qulay. Real konstruksiyalarda esa plastinkaning shakli, yuklanishi yoki tayanch shartlari murakkablashgani sababli sonli usullardan foydalanishga ehtiyoj ortadi.

R. Szilard plastinka masalalarini klassik, variatsion va sonli usullar asosida tahlil qilib, chekli ayirmalar va chekli elementlar usullariga alohida boblar ajratgan. Uning asarida chekli ayirmalar usullari 247–316-betlarda, chekli elementlar usuli esa 364–474-betlarda yoritilgan [2]. Bu holat plastinka masalalarini sonli yechish zamonaviy konstruktiv mexanikadagi mustaqil va muhim hisoblash yo‘nalishi ekanini ko‘rsatadi.

Sonli usullarni qo‘llashning asosiy maqsadi uzluksiz matematik modelni chekli sondagi noma’lumlar va algebraik tenglamalar sistemasiga aylantirishdan iborat. Natijada kompyuter yordamida plastinkaning turli nuqtalaridagi siljish, egilish momentlari, kesuvchi kuchlar va boshqa mexanik kattaliklarni aniqlash imkoniyati paydo bo‘ladi [3; 4].

Metodologiya

Tadqiqotning metodologik asosini elastik plastinka nazariyasi, matematik modellashtirish, differensial tenglamalarni diskretlashtirish va sonli hisoblash usullari tashkil etadi. Tadqiqotda asosiy e’tibor chekli ayirmalar va chekli elementlar usullariga qaratildi. Mazkur usullar plastinkaning uzluksiz deformatsiya maydonini diskret hisoblash modeliga o‘tkazish imkonini beradi [2; 3].

Plastinka masalasini sonli yechishning dastlabki bosqichi matematik modelni aniqlashdir. Bunda plastinkaning uzunligi a, kengligi b, qalinligi *h*, elastiklik moduli E, Puasson koeffitsiyenti ν, tashqi yuk qva tayanch shartlari beriladi. Masalan, to‘g‘ri to‘rtburchak plastinka uchun

$$0\le x\le a,\ 0\le y\le b$$

soha sifatida qabul qilinadi.

Klassik yupqa plastinka uchun boshqaruvchi tenglama:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q(x,y)$$

ko‘rinishiga ega [1; 2].

Ushbu tenglama sonli yechimga tayyorlash uchun hisoblash sohasi tugunlarga bo‘linadi. Chekli ayirmalar usulida hosilalar qo‘shni tugunlardagi funksiyalar qiymatlari orqali yaqinlashtiriladi. Masalan, ikkinchi tartibli hosila uchun markaziy ayirmali formula

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\approx\frac{w_{i+1,j}-2w_{i,j}+w_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

ko‘rinishida yoziladi.

Shunga o‘xshash tarzda y bo‘yicha hosilalar va aralash hosilalar diskretlashtiriladi. Natijada differensial tenglama algebraik tenglamalar sistemasiga aylantiriladi. Bunday yondashuv plastinkaning har bir hisoblash tugunidagi noma’lum siljishni aniqlash imkonini beradi [2; 5].

Chekli ayirmalar usuli plastinka egilishi masalalarida uzoq vaqt davomida qo‘llanib kelgan. Salonen to‘g‘ri to‘rtburchak plastinka uchun egilish elementi bilan chekli ayirmalar usuli o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatgan va plastinka yuklanishining taqsimlanishini aniqroq hisobga olishga qaratilgan

yondashuvni taklif qilgan [5]. Mazkur tadqiqot 1969-yilda International Journal for Numerical Methods in Engineering jurnalida 261–274-betlarda chop etilgan [5].

Chekli elementlar usulida esa plastinka kichik elementlarga bo‘linadi. Har bir element uchun siljish maydoni yaqinlashtiriladi va elementning qattiqlik matritsasi hosil qilinadi. Keyinchalik barcha elementlarning tenglamalari yagona global algebraik sistema ko‘rinishida birlashtiriladi. Zienkiewicz, Taylor va Zhu asarlarida chekli elementlar usulining matematik asoslari, plastinka va qobiqlar uchun elementlar hamda xatoliklarni baholash masalalari batafsil yoritilgan [3].

Chekli elementlar usulining muhim jihatlaridan biri murakkab geometriyani modellashtirish imkoniyatidir. Hartmann va Katz plastinkalar hamda plitalarni chekli elementlar asosida modellashtirishning nazariy va amaliy tomonlarini ko‘rib chiqib, “Slabs” bo‘limini alohida ajratgan [4]. Ushbu bo‘lim 415–484-betlarni qamrab oladi.

Plastinka nazariyasini tanlash ham metodologiyaning muhim qismidir. Yupqa plastinkalarda Kirchhoff–Love modeli, nisbatan qalin plastinkalarda esa ko‘ndalang siljish deformatsiyasini hisobga oluvchi Reissner–Mindlin modeli qo‘llanadi [7; 8]. Katori va Nishimura Reissner–Mindlin nazariyasi asosida yupqa va qalin plastinkalar uchun uchburchak chekli elementni ishlab chiqib, uning sonli tajribalarini amalga oshirgan [8].

Natijalar

Tahlil qilingan ilmiy manbalar plastinka masalalarini sonli yechishda ikki asosiy yo‘nalish — chekli ayirmalar va chekli elementlar usullarining keng qo‘llanishini ko‘rsatadi.

Chekli ayirmalar usulida plastinka yuzasi hisoblash to‘riga ajratiladi. To‘r tugunlaridagi noma’lumlar sifatida ko‘ndalang siljish qiymatlari olinadi. Differensial operatorlarning ayirmali analoglari yordamida algebraik tenglamalar sistemasi tuziladi. Ushbu sistema yechilgach, plastinkaning deformatsiya maydoni aniqlanadi [2; 5].

Pisačić, Horvat va Botak 2019-yilda to‘g‘ri to‘rtburchak plastinkaning egilishini chekli ayirmalar usuli orqali hisoblashni Wolfram Mathematica muhitida amalga oshirgan. Tadqiqotda bir tomoni qistirilgan, qolgan uch tomoni oddiy tayangan plastinka modeli ko‘rib chiqilgan. Bir tekis taqsimlangan bosim ostidagi plastinka uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi tuzilgan va Mathematica yordamida yechilgan. Olingan natijalar NastranInCad chekli elementlar yechimi bilan taqqoslangan [9]. Ushbu maqola Tehnički glasnik jurnalining 2019-yilgi 13-jild, 3-sonida 241–247-betlarda nashr etilgan [9].

Craig Reissner plastinka tenglamalarini chekli ayirmalar usulida yechish masalasini tadqiq qilgan. Tadqiqotda to‘g‘ri to‘rtburchak plastinkalarning oddiy tayangan, qistirilgan, erkin va kombinatsiyalangan tayanch holatlari ko‘rib chiqilgan. Bir tekis va konsentratsiyalangan yuklanishlar uchun hisoblash natijalari boshqa, jumladan chekli elementlar yechimlari bilan solishtirilgan [7]. Maqola 1987-yilda Journal of Engineering Mechanics jurnalida 31–48-betlarda chop etilgan.

1979-yilda nashr etilgan tadqiqotda yupqa to‘g‘ri to‘rtburchak elastik plastinkalarning egilishini chekli ayirmalar yordamida hisoblashning takomillashtirilgan varianti taklif etilgan. Unda biharmonik tenglama plastinkaning egilish momentlari va muvozanat tenglamalari bilan bog‘langan boshqa differensial munosabatlar orqali ifodalangan. Izotrop va ortotrop plastinkalar turli yuklanish va chegaraviy shartlar ostida tahlil qilingan [10]. Mazkur ish Computers & Structures jurnalida 431–438-betlarda e’lon qilingan.

Chekli elementlar usulida plastinka elementlarining shakli va interpolatsiya funksiyalarini to‘g‘ri tanlash yechim aniqligiga ta’sir ko‘rsatadi. Salonen chekli ayirmalar usuli bilan plastinka chekli elementi o‘rtasidagi matematik bog‘liqlikni tahlil qilgan [5]. Keyingi tadqiqotlarda esa uchburchak va to‘rt tugunli to‘rtburchak elementlar asosida plastinka egilishini hisoblashning turli variantlari ishlab chiqilgan [8; 11].

Zhang va Kratzig Mindlin plastinka nazariyasi hamda diskret Kirchhoff shartlariga asoslangan to‘rt tugunli to‘rtburchak chekli elementni tadqiq qilgan. Ular elementning turli to‘rlar va geometrik deformatsiyalangan meshlar uchun yaqinlashuv xususiyatlarini tekshirgan. Natijalar elementning plastinka egilishi masalalarida yaxshi yaqinlashuv xususiyatlariga ega ekanligini ko‘rsatgan [11]. Mazkur maqola 1995-yilda Finite Elements in Analysis and Design jurnalida 195–207-betlarda nashr etilgan.

Kant, Owen va Zienkiewicz esa yuqori tartibli C^0 plastinka egilish elementini tadqiq qilgan. Ularning yondashuvida plastinka qalinligi bo‘yicha ko‘ndalang deformatsiyalarni hisobga olish va turli qalinlikdagi plastinkalar uchun chekli element formulalarini qo‘llash masalalari o‘rganilgan [12]. Tadqiqot Computers & Structures jurnalining 15-jildida 177–183-betlarda e’lon qilingan.

Tahlil va muhokama

Plastinka masalalarini sonli yechishda asosiy masalalardan biri matematik model va real konstruksiya o‘rtasidagi moslikni ta’minlashdir. Sonli algoritmning yuqori aniqlikka ega bo‘lishi o‘z-o‘zidan fizik jihatdan to‘g‘ri natija beradi degani emas. Buning uchun plastinkaning geometrik o‘lchamlari, materiali, yuklanish xarakteri va chegaraviy shartlari real konstruksiyaga mos tanlanishi kerak [2; 4].

Chekli ayirmalar usulining muhim afzalligi uning matematik jihatdan nisbatan sodda va algoritmlashtirish uchun qulayligidir. Ayniqsa, muntazam to‘g‘ri to‘rtburchak sohalarda to‘r tuzish va hosilalarni ayirmali ifodalar bilan almashtirish qulay. Biroq murakkab shakldagi plastinkalarda yoki chegarasi egri chiziqli bo‘lgan sohalarda muntazam to‘rni tashkil qilish qiyinlashadi. Bunday holatda mahalliy approksimatsiyalar va maxsus chegara formulalariga ehtiyoj tug‘iladi [6].

1990-yilda chop etilgan tadqiqotda egri chegarali plastinkalarni chekli ayirmalar usulida hisoblash masalasi ko‘rib chiqilgan. Tadqiqotchilar to‘g‘ri to‘rtburchak hisoblash to‘ridan foydalanib, egri chegaralarda hosil bo‘ladigan notekis tugunlarni mahalliy kvadratik approksimatsiyalar yordamida ifodalagan. Tadqiqot natijalarida usulning bir tekis yuklangan elliptik plastinka misolida samarali ishlashi ko‘rsatilgan [6]. Ushbu ish 837–843-betlarda chop etilgan.

Chekli elementlar usulining afzalligi esa geometrik jihatdan murakkab konstruksiyalarni nisbatan moslashuvchan modellashtirish imkoniyatidir. Plastinka turli shakldagi elementlarga bo‘linishi mumkin. Elementlar sonini oshirish orqali hisoblash to‘ri zichlashtiriladi va odatda yechimning yaqinlashuvini yaxshilash imkoniyati paydo bo‘ladi [3; 4].

Shu bilan birga, to‘rni haddan tashqari zichlashtirish hisoblash xarajatlarini oshiradi. Shuning uchun amaliy hisoblashlarda to‘r zichligi va aniqlik o‘rtasida muvozanat tanlanishi kerak. Zienkiewicz, Taylor va Zhu chekli elementlar hisoblarida xatoliklarni baholash, yaqinlashuv va adaptiv to‘rni takomillashtirish masalalariga alohida e’tibor qaratgan [3].

Plastinka qalinligi ham usul tanlashga ta’sir etadi. Juda yupqa plastinkalarda Kirchhoff nazariyasi ko‘ndalang kesuvchi deformatsiyani e’tiborsiz qoldiradi. O‘rtacha qalinlikdagi plastinkalarda esa Reissner–Mindlin modeli ko‘ndalang siljish deformatsiyasini hisobga oladi [7; 8]. Shuning uchun bitta matematik modelni barcha qalinlikdagi plastinkalarga bir xil tarzda qo‘llash metodik jihatdan to‘g‘ri emas.

Reissner–Mindlin asosidagi chekli elementlarda yana bir muhim muammo — shear locking, ya’ni kesuvchi deformatsiyaning sonli modelda sun’iy ravishda ortiqcha qattiqlik hosil qilishi bilan bog‘liq masala hisoblanadi. Bu muammo yupqa plastinkalarni Mindlin elementlari bilan hisoblashda ayniqsa muhim bo‘lishi mumkin. Shu sababli element formulasi, integratsiya sxemasi va to‘r sifati natijaning ishonchliligiga ta’sir qiladi [13].

Plastinka hisobining ishonchliligini baholash uchun sonli natijalarni analitik yoki boshqa mustaqil sonli yechim bilan taqqoslash maqsadga muvofiq. Pisačić va hammualliflarining tadqiqotida chekli ayirmalar natijalari NastranInCad asosidagi chekli elementlar natijalari bilan solishtirilgan [9]. Craig esa

Reissner tenglamalari asosidagi chekli ayirmalar yechimlarini boshqa yechimlar bilan taqqoslagan [7]. Bunday verifikatsiya sonli modelda yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan xatoliklarni aniqlashga yordam beradi.

Plastinka masalalarida faqat ko‘ndalang siljish qiymatini topish bilan cheklanib qolish ham yetarli emas. Amaliy konstruktiv hisoblarda egilish momentlari, kesuvchi kuchlar, kuchlanishlar va kerak bo‘lsa, kritik yuk yoki tebranish chastotalari ham aniqlanadi. Shu sababli sonli model nafaqat $w(x,y)$ funksiyasini, balki undan hosil bo‘ladigan mexanik kattaliklarni ham yetarli aniqlikda hisoblash imkoniyatiga ega bo‘lishi kerak [1; 2].

Plastinkalarning barqarorlik masalalarida ham sonli usullar keng qo‘llanadi. Szilard plastinka bukilishi va barqarorligini hisoblashda chekli ayirmalar va chekli elementlar yondashuvlarini alohida ko‘rib chiqadi [14]. Timoshenko va Gere esa elastik barqarorlik nazariyasida kritik yuk va plastinka hamda konstruktiv elementlarning barqarorlik holatlarini tahlil qilgan [15].

Umuman olganda, sonli yechim jarayonini quyidagi ketma-ketlikda tashkil etish mumkin: avvalo plastinkaning geometrik va fizik parametrlari belgilanadi; keyin mos nazariya tanlanadi; boshqaruvchi tenglama shakllantiriladi; chegaraviy shartlar aniqlanadi; hisoblash sohasi diskretlashtiriladi; algebraik tenglamalar sistemasi tuziladi; sistema yechiladi; olingan natijalar esa mustaqil yoki analitik natijalar bilan tekshiriladi.

Mazkur ketma-ketlik sonli hisoblashning nafaqat matematik, balki muhandislik nuqtayi nazaridan ham ishonchli bo‘lishini ta’minlashga xizmat qiladi.

Xulosa

Plastinka haqidagi masalalarni sonli yechish zamonaviy konstruktiv mexanikaning muhim yo‘nalishlaridan biridir. Plastinkalarning geometriyasi, material xususiyatlari, yuklanish turi va tayanch shartlari murakkablashgan sari an’anaviy analitik yechimlardan foydalanish qiyinlashadi. Bunday sharoitda chekli ayirmalar va chekli elementlar usullari samarali hisoblash vositalari sifatida namoyon bo‘ladi.

Tadqiqot natijalari shuni ko‘rsatadiki, klassik yupqa plastinka masalalarini ifodalashda Kirchhoff–Love nazariyasi va biharmonik tenglama muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi. O‘rtacha qalinlikdagi plastinkalarda esa Reissner–Mindlin nazariyasidan foydalanish ko‘ndalang kesuvchi deformatsiyani hisobga olish imkonini beradi [1; 7; 8].

Chekli ayirmalar usuli muntazam geometrik sohalar uchun sodda va samarali hisoblash vositasi bo‘lib, plastinkaning differensial tenglamalarini algebraik tenglamalar sistemasiga aylantirish imkonini beradi. Chekli elementlar usuli esa murakkab geometriya, turli tayanch shartlari va notekis hisoblash to‘rlarini modellashtirishda kengroq imkoniyatlarga ega [2; 3; 4].

Ilmiy adabiyotlarda keltirilgan hisoblash tajribalari sonli usullar natijalarini analitik yechimlar yoki boshqa mustaqil sonli usullar bilan solishtirish zarurligini ko‘rsatadi. Ayniqsa, to‘r zichligi, chegaraviy shartlarni berish, plastinka nazariyasini tanlash va sonli yaqinlashuvni tekshirish natijaning aniqligiga bevosita ta’sir qiladi.

Shunday qilib, plastinka masalalarini sonli yechishda asosiy vazifa faqat kompyuter yordamida algebraik tenglamalar sistemasini yechishdan iborat emas. Ishonchli natijaga erishish uchun fizik-matematik modelni to‘g‘ri tanlash, differensial tenglamani asosli ravishda diskretlashtirish, chegaraviy shartlarni to‘g‘ri ifodalash, hisoblash to‘rini asoslash va olingan natijalarni verifikatsiya qilish talab etiladi. Mazkur yondashuv plastinkalarning egilishi, kuchlanish-deformatsiya holati va barqarorligini amaliy jihatdan ishonchli baholash imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1959. — 33–128-betlar.
2. Szilard R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. Hoboken: John Wiley & Sons, 2004. — 21–61, 62–128, 247–316, 364–474-betlar.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. — 247–285, 493–545-betlar.
4. Hartmann F., Katz C. Structural Analysis with Finite Elements. Berlin: Springer, 2007. — 415–484-betlar.
5. Salonen E.-M. A rectangular plate bending element the use of which is equivalent to the use of the finite difference method // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1969. Vol. 1, No. 3. — P. 261–274.
6. Fan S.C., Cheung Y.K. The bending of curvilinear plates by the finite difference method // Computers & Structures. 1990. Vol. 37, No. 5. — P. 837–843.
7. Craig R.J. Finite Difference Solutions of Reissner's Plate Equations // Journal of Engineering Mechanics. 1987. Vol. 113, No. 1. — P. 31–48.
8. Katori H., Nishimura T. Non-conforming triangular finite element based on Mindlin plate theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1993. Vol. 104, No. 2. — P. 173–186.
9. Pisačić K., Horvat M., Botak Z. Finite difference solution of plate bending using Wolfram Mathematica // Tehnički glasnik. 2019. Vol. 13, No. 3. — P. 241–247.
10. Harik I.E., Sfeir D. An improved finite-difference analysis of bending of thin rectangular elastic plates // Computers & Structures. 1979. Vol. 10, No. 3. — P. 431–438.
11. Zhang J.-W., Kratzig W.B. A simple four-noded quadrilateral finite element for plates // Finite Elements in Analysis and Design. 1995. Vol. 19, No. 3. — P. 195–207.
12. Kant T., Owen D.R.J., Zienkiewicz O.C. A refined higher-order C° plate bending element // Computers & Structures. 1982. Vol. 15, No. 2. — P. 177–183.
13. Lee S.W., Bathe K.-J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1986. — P. 131–150.
14. Szilard R. Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods. Chapter 16: Fundamentals of Stability Analysis. Hoboken: Wiley, 2004. — 497–518-betlar.
15. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of Elastic Stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1961. — 356–430-betlar.