Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

RAQAMLI EGIZAKLARNI YARATISHDA GIPERBOLIK SISTEMALAR UCHUN ARALASH MASALALARDA MA'LUMOTLARNI ASSIMILYATSIYA QILISH USULLARI

Alimova Rayhon Abdug'afforovna
E-mail: alimovar327@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.23204498

Annotatsiya. Maqolada raqamli egizaklarni yaratishda giperbolik sistemalar uchun aralash masalalarda ma'lumotlarni assimilyatsiya qilish usullari tahlil qilinadi. Giperbolik masalalarning o'ziga xos jihatlari, ya'ni axborotning cheklangan tezlikda tarqalishi, yechimdagi uzilishlar va chegaraviy shartlardagi noaniqlik ko'rib chiqiladi. Variatsion (3D-Var, 4D-Var), filtrlash (Kalman filtri, ansambl Kalman filtri) va nudging usullari taqqoslanadi, mashinaviy o'qitishga asoslangan gibrid yondashuvlarga to'xtalinadi. Ish jarayoni sayoz suv tenglamalari asosidagi ochiq kanal egizagi misolida tushuntiriladi.
Kalit so'zlar: raqamli egizak, ma'lumotlarni assimilyatsiya qilish, giperbolik sistemalar, aralash masala, Kalman filtri, 4D-Var.

Аннотация. В статье анализируются методы ассимиляции данных в смешанных задачах для гиперболических систем при создании цифровых двойников. Рассматриваются особенности гиперболических задач: конечная скорость распространения информации, разрывы решений и неопределённость граничных условий. Сравниваются вариационные методы (3D-Var, 4D-Var), методы фильтрации (фильтр Калмана, ансамблевый фильтр Калмана) и метод релаксации (nudging), а также гибридные подходы на основе машинного обучения. Схема работы поясняется на примере цифрового двойника открытого канала на основе уравнений мелкой воды.
Ключевые слова: цифровой двойник, ассимиляция данных, гиперболические системы, смешанная задача, фильтр Калмана, 4D-Var.

Abstract. This paper analyzes data assimilation methods for initial-boundary value problems of hyperbolic systems in the context of building digital twins. The specific features of hyperbolic problems are discussed: finite propagation speed of information, discontinuities of solutions, and uncertainty in boundary conditions. Variational (3D-Var, 4D-Var), filtering (Kalman filter, ensemble Kalman filter) and nudging methods are compared, and hybrid approaches based on machine learning are reviewed. The workflow is illustrated with a digital twin of an open channel based on the shallow water equations.
Keywords: digital twin, data assimilation, hyperbolic systems, initial-boundary value problem, Kalman filter, 4D-Var.

1. KIRISH

Raqamli egizak (digital twin) tushunchasi real fizik obyekt va uning virtual modeli o'rtasida doimiy ma'lumot almashinuvini nazarda tutadi: obyektdagi datchiklar o'lchovlari modelni yangilab turadi, model bashorati esa obyektni boshqarish va qaror qabul qilishda ishlatiladi [1]. Oddiy

simulyatsiyadan farqli ravishda raqamli egizak obyektning joriy holatini aks ettirishi va u bilan sinxron rivojlanishi kerak [2, 3].

Muhandislik va tabiiy tizimlarning katta qismi, jumladan ochiq kanallardagi oqim, quvurlar, akustik va elastik to‘lqinlar, aerodinamik oqimlar giperbolik tipdagi qisman hosilali tenglamalar sistemalari bilan tavsiflanadi [4, 5]. Bunday tizimlarda axborot xarakteristikalar bo‘ylab cheklangan tezlik bilan tarqaladi, nochiziqli holda esa silliq boshlang‘ich ma’lumotlardan ham uzilishlar (zarba to‘lqinlari) paydo bo‘lishi mumkin.

Amalda giperbolik modelning aralash masalasi, ya’ni boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan qo‘yilgan masala, to‘liq aniqlanmagan holda uchraydi. Boshlang‘ich holat o‘lchanmaydi, chegaraviy shartlar (sarf, sath, bosim) shovqinli yoki noma’lum, model parametrlari esa taxminiy bo‘ladi. Natijada sof modelli hisob vaqt o‘tishi bilan real holatdan uzoqlashadi. Ma’lumotlarni assimilyatsiya qilish model bashorati va o‘lchovlarni ularning noaniqliklarini hisobga olib birlashtirib, tizim holatining eng ishonchli bahosini beruvchi usullar majmuasidir [9-11].

Assimilyatsiya usullari asosan atmosfera va okean modellari uchun ishlab chiqilgan [9, 11]. Giperbolik sistemalarda ularni qo‘llash qo‘shimcha masalalar tug‘diradi: chegaraviy shartlarning noaniqligi, yechimning uzilishlari, xatolarning Gauss taqsimotidan chetlashishi va real vaqt rejimidagi hisoblash cheklovlari. Maqolaning maqsadi giperbolik aralash masalalar uchun assimilyatsiyaning asosiy usullarini tahlil qilish, ularning qo‘llanish chegaralarini aniqlash va raqamli egizaklarda qo‘llash bo‘yicha tavsiyalar berishdir.

2. GIPERBOLIK SISTEMALAR UCHUN ARALASH MASALANING Qo‘YILISHI

Chiziqli giperbolik sistemani ko‘rib chiqamiz:

$$u_t + A(x,t)\, u_x = f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \le T \qquad (1)$$

$$u(x,0) = u^0(x) \qquad (2)$$

bu yerda $u(x,t) \in R^n$ noma’lum vektor-funksiya, A matritsa haqiqiy xos qiymatlarga va to‘liq xos vektorlar sistemasiga ega (giperboliklik sharti) [4, 6]. Oddiylik uchun A o‘zgarmas va xos qiymatlari noldan farqli deb olamiz: $A = R\Lambda R^{-1}$. $w = R^{-1}u$ xarakteristik o‘zgaruvchilarga o‘tsak, sistema ajraladi:

$$w_t + \Lambda\, w_x = R^{-1}f \qquad (3)$$

Bu yerda $\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda^+, \Lambda^-)$, Λ^+ musbat, Λ^- manfiy xos qiymatlardan iborat. Har bir w_j komponenta $dx/dt = \lambda_j$ xarakteristika bo‘ylab tashiladi. Shuning uchun chegaraviy shartlar faqat sohaga kirayotgan xarakteristikalarga qo‘yiladi: chap chegarada musbat, o‘ng chegarada manfiy tezlikli komponentalarga:

$$w^+(0,t) = S_0\, w^-(0,t) + \mu_0(t) \qquad (4)$$

$$w^-(L,t) = S_L\, w^+(L,t) + \mu_L(t) \qquad (5)$$

Shartlar soni kiruvchi xarakteristikalar soniga teng bo‘lishi shart: ortiqcha shart masalani qarama-qarshi, kam shart esa noaniq qiladi. Aralash masalaning korrektligi uchun Kreyss [6] algebraik shart (Kreyss-Lopatinskiy sharti) taklif qilgan; u bajarilganda yechim uchun

$$\|u(\cdot,t)\| \le K\, e^{\alpha t} \left(\|u^0\| + \|f\| + \|\mu\| \right) \qquad (6)$$

ko‘rinishidagi energetik baho o‘rinli bo‘ladi (mos normalarda) [6]. Demak, chegaraviy ma’lumot xatosi butun sohada yechim xatosiga aylanishi mumkin, shuning uchun assimilyatsiyada chegaraviy shartlar ham noma’lum kattalik sifatida baholanadi.

Nochiziqli holatda sistema saqlanish qonuni shaklida yoziladi:

$$u_t + F(u)_x = S(u,x) \qquad (7)$$

Uning yechimlari uzilishli bo‘lishi mumkin, shuning uchun kuchsiz (umumlashgan) yechimlar va entropiya sharti qo‘llaniladi [4]. Chegaraviy shartlar ham kuchsiz ma’noda, Bardos-Le Ru-Nedelek shaklida beriladi va chegaraviy qiymat har doim ham aynan qabul qilinmaydi [7]. Amaliy misol sifatida bir o‘lchamli sayoz suv tenglamalarini keltiramiz (kanal va daryolar uchun):

$$h_t + (hv)_x = 0, \quad (hv)_t + (hv^2 + gh^2/2)_x = -g\, h\, b_x \qquad (8)$$

Bu yerda h suv chuqurligi, v tezlik, g erkin tushish tezlanishi, b(x) o‘zan tubi. Xos qiymatlar $v \pm c$, $c = \sqrt{(gh)}$. Sokin (subkritik, $|v| < c$) oqimda bitta xarakteristika sohaga kiradi, ikkinchisi chiqadi, shuning uchun har bir chegarada bittadan shart qo‘yiladi, masalan kirishda sarf, chiqishda sath. Bunday masalalar uchun konservativ chekli hajmlar usullari (Godunov tipidagi sxemalar) qo‘llaniladi [5].

3. MA’LUMOTLARNI ASSIMILYATSIYA QILISH MASALASINING QO‘YILISHI

Masalani fazoda diskretlashtirgandan so‘ng holat vektori $x_k \in R^N$ (N katta, odatda 10^3–10^7) va o‘lchovlar vektori $y_k \in R^m$ ($m \ll N$) uchun quyidagi modelni olamiz:

$$x_{k+1} = M_k(x_k, \mu_k) + \eta_k \qquad (9)$$

$$y_k = H_k(x_k) + \varepsilon_k \qquad (10)$$

Bu yerda M_k giperbolik masalaning sonli yechim operatori, H_k kuzatuv operatori (datchiklar joylashuvi), η_k va ε_k mos ravishda model va o‘lchov xatolari, odatda kovariatsiyalari Q_k va R_k bo‘lgan nol o‘rtacha Gauss tasodifiy kattaliklari deb olinadi. Masalaning bayesona ifodasi:

$$p(x \mid y) \propto p(y \mid x)\, p(x) \qquad (11)$$

Bu yerda p(x) oldindan ma’lum (bashorat) taqsimot, p(y|x) o‘lchovlarning to‘g‘ri kelish funksiyasi. Chiziqli model va Gauss xatolarida (11) taqsimot Gauss bo‘ladi va uning o‘rtachasi Kalman filtri orqali topiladi [8]. Aralash masalada noma’lumlar tarkibiga boshlang‘ich holat u^0, chegaraviy ma’lumotlar μ_0, μ_L va model parametrlari kiradi. Ularni birgalikda z boshqaruv vektori deb ataymiz. Usullar ikki oilaga bo‘linadi: variatsion (butun vaqt oynasi bo‘yicha z ni tanlash) va ketma-ket (har o‘lchov kelganda holatni yangilash) [10].

4. ASSIMILYATSIYA USULLARI

4.1. Nudging (Nyuton relaksatsiyasi)

Usulda model tenglamasiga o‘lchov bilan hisob orasidagi farqqa proporsional tuzatuvchi had qo‘shiladi [12]:

$$u_t + A\, u_x = f + G(x)\, [\, y(x,t) - H\, u\,] \qquad (12)$$

Bu yerda G kuchaytirish matritsasi, uning tartibi $1/\tau$ (τ relaksatsiya vaqti). Nudging sodda va tez, ammo noaniqliklarni hisobga olmaydi, G ni tanlash esa tajribaga tayanadi. Giperbolik tizimlarda tuzatish xarakteristikalar bo‘ylab oqim yo‘nalishida tarqaladi, shuning uchun datchiklar soha bo‘ylab yetarlicha zich joylashgan bo‘lishi kerak.

4.2. Variatsion usullar: 3D-Var va 4D-Var

Variatsion yondashuvda z ni ushbu funksionalni minimallashtirish orqali topamiz [13, 14]:

$$J(z) = \tfrac{1}{2}\,(z - z_b)^T\, B^{-1}\,(z - z_b) + \tfrac{1}{2}\,\Sigma_{k=1}^{K}\,(y_k - H_k x_k)^T\, R_k^{-1}\,(y_k - H_k x_k) \qquad (13)$$

Bu yerda z_b oldingi (fon) bahosi, B uning xato kovariatsiyasi, $x_k = M_{0\to k}(z)$. Faqat bitta vaqt lahzasidagi o‘lchovlar ishlatilsa usul 3D-Var, vaqt oynasidagi barcha o‘lchovlar ishlatilsa 4D-Var

deyiladi. Gradient qo‘shma (adjoint) tenglama orqali bitta oldinga va bitta orqaga integrallash bilan hisoblanadi [13]. Chiziqli sistema uchun qo‘shma masala:

$$-\lambda_t - A^T \lambda_x = \Sigma_k H^T R^{-1} (H u - y_k) \delta(t - t_k), \quad \lambda(x,T) = 0 \qquad (14)$$

$$\nabla_{u0} J = B^{-1} (u^0 - u_b) + \lambda(x,0) \qquad (15)$$

Qo‘shma sistema ham giperbolik, ammo uning xarakteristikalari teskari yo‘nalishda boradi, shuning uchun qo‘shma masalada kiruvchi va chiquvchi chegaralar o‘rin almashadi. Chegaraviy ma’lumotlarning gradienti qo‘shma o‘zgaruvchining chegaradagi qiymati orqali ifodalanadi. Bu 4D-Var ning muhim afzalligi: u boshlang‘ich holat bilan birga chegaraviy shartlarni ham baholay oladi. Silliqlik uchun (13) ga regulyarizatsiya hadi qo‘shiladi. Usulning kamchiligi qo‘shma kodni yaratish murakkabligi va uzilishli yechimlarda gradient ishonchsizligidir [14].

4.3. Kalman filtri va ansambl usullari

Kalman filtri har qadamda bashorat va tuzatish bosqichlaridan iborat [8, 9]:

$$x^f_k = M_k x^a_{k-1}, \quad P^f_k = M_k P^a_{k-1} M_k^T + Q_k \qquad (16)$$

$$K_k = P^f_k H_k^T (H_k P^f_k H_k^T + R_k)^{-1} \qquad (17)$$

$$x^a_k = x^f_k + K_k (y_k - H_k x^f_k), \quad P^a_k = (I - K_k H_k) P^f_k \qquad (18)$$

Bu yerda f va a indekslari bashorat va tahlil (analiz) qiymatlarini, K_k Kalman kuchaytirish matritsasini bildiradi. Yuqori o‘lchamli tizimlarda N×N o‘lchamli P matritsani saqlash va yangilash mumkin emas. Nochiziqli modellar uchun kengaytirilgan Kalman filtri (EKF) modelni chiziqlashtiradi, lekin zarba to‘lqinlari bo‘lganda chiziqlashtirish noto‘g‘ri bo‘ladi.

Ansambl Kalman filtri (EnKF) kovariatsiyani N_e ta model traektoriyasidan baholaydi [15, 16]:

$$P^f \approx 1/(N_e - 1) \Sigma_{i=1}^{N_{-\{e\}}} (x^{f,i} - \bar{x}^f)(x^{f,i} - \bar{x}^f)^T \qquad (19)$$

$$x^{a,i} = x^{f,i} + K (y + \varepsilon^i - H x^{f,i}), \quad i = 1,\ldots,N_e \qquad (20)$$

Bu usulda qo‘shma kod ham, P ni to‘g‘ridan-to‘g‘ri saqlash ham talab qilinmaydi, hisob esa parallellashtiriladi [17]. Kichik ansambl tufayli soxta uzoq masofali korrelyatsiyalar paydo bo‘ladi, shuning uchun kovariatsiyani lokalizatsiya qilish ($P^f \circ \rho$, ρ masofaga bog‘liq funksiya) va ansambl tarqalishini inflyatsiya qilish qo‘llaniladi [17, 18]. Lokal ansambl-transformatsion filtr (LETKF) bu g‘oyani samarali amalga oshiradi [18]. Chegaraviy ma’lumot va parametrlarni baholash uchun holat kengaytiriladi: $\tilde{x} = (x, \mu, \theta)$, bunda $\mu_{k+1} = \mu_k + \xi_k$ (tasodifiy yurish modeli) qabul qilinadi.

Gauss taxminisiz ishlaydigan zarralar filtri [19] yuqori o‘lchamda zarralar vaznining bitta zarrada to‘planishi tufayli amaliy emas, shuning uchun u lokal masalalarda yoki ansambl filtrlari bilan birga qo‘llaniladi.

4.4. Mashinaviy o‘qitish va fizikaga asoslangan neyron tarmoqlar

Fizika asosidagi neyron tarmoqlar (PINN) tenglama qoldig‘ini, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni hamda o‘lchovlarni birgalikda yo‘qotish funksiyasiga kiritadi [20]:

$$L(\theta) = L_{data} + L_{PDE} + L_{IC/BC} \qquad (21)$$

Bunday tarmoq kam va shovqinli ma’lumotlardan chegaraviy shartlar va parametrlarni baholay oladi, lekin uzilishli yechimlarni aniq tasvirlashda qiyinchiliklarga duch keladi. Assimilyatsiya yordamida modelning noaniq qismini neyron tarmoq bilan o‘rganish [21] va surrogat modellar bilan ansambl hisobini tezlashtirish ham mumkin. Bu yondashuvlar klassik usullarni to‘ldiradi, ammo aniqlik kafolatlari cheklangan.

1-jadvalda usullar giperbolik masalalar nuqtayi nazaridan taqqoslangan.

1-jadval. Assimilyatsiya usullarining taqqoslanishi

Usul	Afzalliklari	Kamchiliklari	Giperbolik masalalarda qo‘llanilishi
Nudging	Sodda, hisoblash xarajati kam, real vaqtda ishlaydi	Noaniqliklarni hisobga olmaydi; kuchaytirish koeffitsiyenti empirik tanlanadi	Egizakning tez boshlang‘ich varianti; zich o‘lchovlarda samarali
4D-Var	Dinamikaga mos baho; chegaraviy ma’lumotni ham baholaydi	Qo‘shma model kerak; zarbalarda gradient noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin	Silliq rejimlarda va chegaraviy shartni identifikatsiya qilishda eng mos
EnKF, LETKF	Qo‘shma model shart emas; parallel hisob	Tanlash xatosi; lokalizatsiya va inflyatsiya kerak; Gauss taxmini	Amaliyotda keng; zarba atrofida o‘rtacha baho yoyilib ketadi
ML va PINN gibridlari	Model xatosini o‘rganadi; tez surrogat model	Ma’lumot talab qiladi; uzilishlarda aniqlik past; kafolat kam	Yordamchi vosita: parametr va chegaraviy shartlarni baholash

5. GIPERBOLIK TIZIMLARGA XOS QIYINCHILIKLAR

Kuzatiluvchanlik va cheklangan tezlik. Datchik ma’lumoti faqat o‘zining bog‘liqlik sohasidagi holatni aniqlaydi. Masalan, bitta chegaradagi o‘lchovlardan butun sohadagi boshlang‘ich holatni tiklash uchun kuzatuv vaqti kamida xarakteristikaning sohani kesib o‘tish vaqtidan ($L/|\lambda|$) katta bo‘lishi kerak. Bu shart xarakteristikalar geometriyasi bilan bog‘liq [22]. Demak, 4D-Var vaqt oynasi va filtr lokalizatsiya radiusini xarakteristik tezlikka mos tanlash zarur.

Chegaraviy shartlarning noaniqligi. Noma’lum chegaraviy ma’lumot ichkariga kechikish bilan ta’sir qiladi, uni baholash regulyarizatsiyani talab qiluvchi teskari masaladir; u holatga qo‘shib (4.3-bo‘lim) yoki variatsion masalada boshqaruv sifatida (4.2-bo‘lim) baholanadi.

Uzilishlar va nogausslik. Zarba atrofida yechim differensiallanmaydi, chiziqlashtirilgan va qo‘shma modellar noto‘g‘ri natija beradi. Xatolar ko‘pincha amplitudada emas, zarba holatining siljishida bo‘ladi va bunday xato additiv Gauss xatosi bo‘lmaydi: ansambl o‘rtachasi keskin zarbani yoyib yuboradi. Bunday hollarda nogauss usullar, o‘zgaruvchilarni almashtirish va siljishni hisobga oluvchi yondashuvlar zarur.

Sxema bilan moslik va xarajat. Tahlil qadami saqlanish qonunlari va fizik cheklovlarni (masalan, $h \geq 0$) buzmasligi kerak; diskret va uzluksiz qo‘shma masalalar gradientlari farq qilishi mumkin. Real vaqt cheklovi lokalizatsiya, kamaytirilgan tartibli va surrogat modellarni talab qiladi.

6. RAQAMLI EGIZAKKA TATBIQ

Giperbolik modelli raqamli egizakda assimilyatsiya tsikli quyidagicha ishlaydi: datchik ma’lumotlari tozalanadi va xato kovariatsiyasi R baholanadi; model joriy holatdan keyingi o‘lchov lahzasigacha bashorat qiladi; tanlangan usul (EnKF, 4D-Var yoki nudging) holat va noma’lum

chegaraviy shartlarni yangilaydi; tahlil holatidan bashorat va uning noaniqligi hisoblanib, qaror qabul qilish yoki boshqaruvga uzatiladi; tsikl yangi o‘lchov bilan takrorlanadi.

Misol sifatida sayoz suv tenglamalari (8) bilan tavsiflanadigan ochiq sug‘orish kanali egizagini ko‘ramiz. Datchiklar kanal bo‘ylab bir nechta kesimda suv sathini o‘lchaydi, kirishdagi sarf $\mu_0(t)$ esa aniq noma’lum yoki shovqinli. Holat vektori $x = (h, hv)$ va chegaraviy sarf μ_0 birga baholanadi: EnKF yondashuvida kengaytirilgan holat $\tilde{x} = (x, \mu_0)$ ishlatiladi, lokalizatsiya radiusi esa to‘lqin tezligi $v + c$ va o‘lchov oralig‘iga mos tanlanadi. Vaqt oynasi kanal bo‘ylab tarqalish vaqtidan katta bo‘lsa, 4D-Var ham $\mu_0(t)$ ni tiklay oladi. Gidravlik sakrash kuzatiladigan rejimlarda ansambl usullari nogauss tuzatishlar bilan to‘ldirilishi kerak. Maqolada son tajribalari keltirilmagan.

Amaliy tavsiya: silliq rejimlarda va chegaraviy shartni identifikatsiya qilishda 4D-Var, real vaqtda va katta o‘lchamda lokalizatsiyali EnKF (LETKF), tezkor boshlang‘ich yaqinlashishda nudging, zarbali rejimlarda nogauss tuzatishlar mos keladi.

XULOSA

Maqolada giperbolik sistemalar uchun aralash masalalarda ma’lumotlarni assimilyatsiya qilish usullari raqamli egizaklar nuqtayi nazaridan ko‘rib chiqildi. Aralash masalaning korrektligi kiruvchi xarakteristikalar soniga teng chegaraviy shartlarga bog‘liq ekani va chegaraviy ma’lumot xatosi yechimga uzluksiz ta’sir qilishi ko‘rsatildi. Shuning uchun giperbolik egizaklarda chegaraviy shartlar ham baholanishi kerak. Nudging, 4D-Var, ansambl Kalman filtri va gibrid usullar taqqoslanib, ularning kuchli va zaif tomonlari aniqlandi. Asosiy qiyinchiliklar cheklangan tarqalish tezligi bilan bog‘liq kuzatiluvchanlik, uzilishlarda nogausslik va chiziqlashtirishning yaroqsizligi, sonli sxema bilan moslik hamda real vaqt cheklovlaridir. Istiqbolli yo‘nalishlar: zarba to‘lqinlari uchun nogauss assimilyatsiya, ansambl-variatsion gibridlar va surrogat modellar bilan tezlashtirilgan egizaklar.

ADABIYOTLAR

1. Grieves M. Digital twin: manufacturing excellence through virtual factory replication. White Paper, 2014.
2. Rasheed A., San O., Kvamsdal T. Digital twin: values, challenges and enablers from a modeling perspective // IEEE Access. 2020. Vol. 8. P. 21980-22012.
3. Kapteyn M.G., Pretorius J.V.R., Willcox K.E. A probabilistic graphical model foundation for enabling predictive digital twins at scale // Nature Computational Science. 2021. Vol. 1. P. 337-347.
4. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: SIAM, 1973.
5. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
6. Kreiss H.-O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1970. Vol. 23. P. 277-298.
7. Bardos C., Le Roux A.Y., Nédélec J.-C. First order quasilinear equations with boundary conditions // Communications in Partial Differential Equations. 1979. Vol. 4, No. 9. P. 1017-1034.
8. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Journal of Basic Engineering. 1960. Vol. 82. P. 35-45.

9. Kalnay E. Atmospheric modeling, data assimilation and predictability. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
10. Law K., Stuart A., Zygalakis K. Data assimilation: a mathematical introduction. Cham: Springer, 2015.
11. Carrassi A., Bocquet M., Bertino L., Evensen G. Data assimilation in the geosciences: an overview of methods, issues, and perspectives // WIREs Climate Change. 2018. Vol. 9, No. 5. e535.
12. Anthes R.A. Data assimilation and initialization of hydrostatic forecast models // Journal of the Atmospheric Sciences. 1974. Vol. 31. P. 702-719.
13. Le Dimet F.-X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // Tellus A. 1986. Vol. 38. P. 97-110.
14. Bannister R.N. A review of operational methods of variational and ensemble-variational data assimilation // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2017. Vol. 143. P. 607-633.
15. Evensen G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics // Journal of Geophysical Research. 1994. Vol. 99, No. C5. P. 10143-10162.
16. Evensen G. The ensemble Kalman filter: theoretical formulation and practical implementation // Ocean Dynamics. 2003. Vol. 53. P. 343-367.
17. Houtekamer P.L., Mitchell H.L. A sequential ensemble Kalman filter for atmospheric data assimilation // Monthly Weather Review. 2001. Vol. 129. P. 123-137.
18. Hunt B.R., Kostelich E.J., Szunyogh I. Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: a local ensemble transform Kalman filter // Physica D. 2007. Vol. 230. P. 112-126.
19. van Leeuwen P.J. Particle filtering in geophysical systems // Monthly Weather Review. 2009. Vol. 137. P. 4089-4114.
20. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations // Journal of Computational Physics. 2019. Vol. 378. P. 686-707.
21. Brajard J., Carrassi A., Bocquet M., Bertino L. Combining data assimilation and machine learning to emulate a dynamical model from sparse and noisy observations: a case study with the Lorenz 96 model // Journal of Computational Science. 2020. Vol. 44. 101171.
22. Bardos C., Lebeau G., Rauch J. Sharp sufficient conditions for observation, control, and stabilization of waves from the boundary // SIAM Journal on Control and Optimization. 1992. Vol. 30, No. 5. P. 1024-1065.