Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ

Шамуратов Элёр Алимбоевич
УрГУ (Ургенчский государственный университет),
кафедра механики и математического инжиниринга
shamuratovelyor68@gmail.com
Мадрахимов Темур Рустамбекович
УрГУ, кафедра математического анализа
temurmadraximov1995@gmail.com
Ахмедов Курбонбай Юлдашбоевич
УрГУ, кафедра математического анализа
axmedovqurbonbay@gmail.com
Якубов Хамдам Эргаш угли
УрГУ (Ургенчский государственный университет), преподаватель кафедры прикладной математики и математики
yakubov0404@mail.ru
Хусаинов Ислом Икрамович
УрГУ, преподаватель кафедры прикладной математики и математики
islomxusainov1988@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.24072443

Аннотация. В данной работе исследуется задача Коши для системы Захарова-Шабата, связанной с нелинейным уравнением Шредингера (nNLS) с простым самосогласованным источником. При условии, что оператор не имеет спектральных особенностей и все его собственные значения являются простыми, с использованием представления Лакса получена временная эволюция данных рассеяния как для непрерывного, так и для дискретного спектров. Найденные эволюционные соотношения позволяют применить метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) и восстановить потенциал с помощью интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, что дает возможность построить точное решение рассматриваемой начальной задачи.

Ключевые слова: система Захарова-Шабата, метод обратной задачи рассеяния (МОЗР), нелинейное уравнение Шредингера (nNLS) с самосогласованным источником, задача Коши, эволюция данных рассеяния, уравнение Гельфанда-Левитана-Марченко, представление Лакса, решения Йоста.

Введение

Нелинейные эволюционные уравнения и методы поиска их решений являются одним из важнейших направлений современной математической физики. В частности, интегрируемые уравнения с самосогласованным источником адекватно описывают множество сложных волновых

процессов, возникающих в физике плазмы, нелинейной оптике, акустике и физике твердого тела. При аналитическом решении задач этого класса метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) широко используется как один из наиболее эффективных и фундаментальных математических инструментов.

В данной работе исследуется задача Коши, поставленная для системы нелинейных уравнений Шредингера (nNLS) с простым самосогласованным источником. Основная цель работы — анализ прямой и обратной задач рассеяния для системы Захарова-Шабата, потенциал которой является решением рассматриваемой задачи, а также определение временной эволюции данных рассеяния.

При условии, что оператор не имеет спектральных особенностей и все его собственные значения являются простыми, изучены асимптотические свойства решений Йоста. С использованием представления Лакса выведены уравнения эволюции данных рассеяния для непрерывного и дискретного спектров. Полученные результаты позволяют полностью восстановить потенциал с помощью интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко и, в свою очередь, открывают путь к построению точных решений исследуемой задачи Коши.

Постановка задачи

В данном работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} \mu_x = (u \cdot u^*)_t, \\ iu_{xt} + 2\mu u + iu_x = i\sum\limits_{k=1}^{N} (\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^{*\ 2}), \\ L\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \qquad k = 1,2,...,2N, \quad x \in R \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

где начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|dx < \infty,$$

2) Оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & -u_0(x) \\ -u^*{}_0(x) & -\dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$ не имеет спектральных особенностей и имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), ..., \xi_{2N}(0)$. Здесь функция $u_0^*(x)$ является комплексным сопряжением функции $u_0(x)$.

А $\Phi_k = (\Phi_{k1}(x,t), \Phi_{k2}(x,t))^T$ - собственная вектор-функция оператора

$L(t) = i\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u^*(x,t) & -\dfrac{d}{dx} \end{pmatrix}$, соответствующая собственному значению ξ_k. Для

определённости будем предполагать, что в сумме участвующей в правой части (1) сначала идут члены с $\operatorname{Im}\xi_k > 0,\ k = 1,2,...,N$. Также предполагается, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{k1}\Phi_{k2}dx = A_k(t), \qquad k = 1,2,...,2N, \quad (3)$$

с заданными непрерывными, ненулевыми функциями $A_k(t)$, которые удовлетворяют условиям

$$A_k(t) = A_n(t) \text{ при } \xi_k = -\xi_n.$$

Пусть, функция $u = u(x,t)$ является комплексной и достаточно гладкой функцией x и t, для всех $t \geq 0$ удовлетворяет требованию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1+|x|)\left(|u(x,t)|+|u_x(x,t)|\right)\right)dx < \infty, \quad (4)$$
$$\mu(x,t) \to 0, \qquad \text{при} \qquad x \to \pm\infty.$$

В данной работе получены эволюция данных рассеяния для системы Захарова-Шабата с потенциалом, являющимся решением рассматриваемой задачи Коши (1)-(4) для уравнения nNLS с простым самосогласованным сточником.

Задача рассеяния

В этом разделе мы приводим известные факты из теории прямого и обратного рассеяния для системы уравнений Захарова–Шабата на вещественной оси [7]

$$\begin{cases} y_{1x} = -i\xi y_1 + u(x)y_2, \\ y_{2x} = i\xi y_2 - u^*(x)y_1. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $u(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u(x)|dx < \infty. \quad (6)$$

Система уравнений (5) имеет единственные решения Йоста $\varphi(x,\xi)$ и $\psi(x,\xi)$. Для вещественных ξ решения Йоста имеют следующие асимптотики:

$$\left.\begin{matrix} \varphi(x,\xi) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi}(x,\xi) \to \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \end{matrix}\right\}, \quad x \to -\infty \qquad \left.\begin{matrix} \psi(x,\xi) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} \\ \bar{\psi}(x,\xi) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{matrix}\right\}, \quad x \to +\infty$$

Заметим, что здесь и далее функция $\bar{\varphi}$ не является комплексно-сопряженной к φ. Пары вектор-функций $\{\psi, \bar{\psi}\}$ линейно независимы, и для них выполняется соотношение

$$\varphi(x,\xi) = a(\xi)\bar{\psi}(x,\xi) + b(\xi)\psi(x,\xi), \quad (7)$$

где $a(\xi) = W\{\varphi,\psi\} \equiv \varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1$,

$$\overline{\psi}(x,\xi)=\begin{pmatrix}\psi_2^*(x,\xi^*)\\ -\psi_1^*(x,\xi^*)\end{pmatrix},\quad \overline{\varphi}(x,\xi)=\begin{pmatrix}\varphi_2^*(x,\xi^*)\\ -\varphi_1^*(x,\xi^*)\end{pmatrix}\quad (7^*)$$

Функция $a(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\xi>0$. При $|\xi|\to\infty,\ \operatorname{Im}\xi\ge 0$ функция $a(\xi)$ обладает асимптотикой $a(\xi)=1+O\left(\frac{1}{|\xi|}\right)$. Функция $a(\xi)$ может иметь в полуплоскости $\operatorname{Im}\xi>0$ только конечное число нулей $\xi_k, k=1,2,...,N$. Нули ξ_k функций $a(\xi)$ соответствуют собственным значениям оператора L в верхней полуплоскости.

В этой работе, мы предполагаем, что оператор L не имеет спектральных особенностей, и все его собственные значения простые, так, что

$$\phi(x,\xi_k)=C_k\psi(x,\xi_k),\ k=1,2,...,N..$$

где $\varphi_k(x)=\varphi(x,\xi_k),\ \psi_k(x)=\psi(x,\xi_k)$ и величины C_k не зависят от x. Отношение

$$r^+(\xi)=\frac{b(\xi)}{a(\xi)}$$

определяет коэффициент отражения для задачи рассеяния (5).

Определение. Набор $\{r^+(\xi),\ C_k,\ \xi_k,\ k=1,...,N\}$ называется данными рассеяния.

Отметим, что вектор-функции

$$h_n(x)=\frac{\frac{d}{d\xi}(\varphi-C_n\psi)\Big|_{\xi=\xi_n}}{\dot{a}(\xi_n)},\quad n=1,2,...,N,\qquad (8)$$

являются решением уравнений $Lh_n=\xi_n h_n$. Согласно равенству $a(\xi)=W\{\varphi,\psi\}$, получаем следующие асимптотики

$$\psi\sim a(\xi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi x}\ \text{при}\ x\to-\infty,\qquad \varphi\sim a(\xi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\xi x}\ \text{при}\ x\to\infty,$$

которые справедливы при $\operatorname{Im}\xi>0$. Из этих оценок и равенства (8) следует, что

$$\begin{aligned}h_n&\sim -C_n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi_n x}\quad \text{при}\ x\to-\infty,\\ h_n&\sim\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-i\xi_n x}\qquad \text{при}\ x\to\infty.\end{aligned}\qquad (9)$$

В частности

$$W\{\varphi_n,h_n\}\equiv\varphi_{n1}h_{n2}-\varphi_{n2}h_{n1}=-C_n,\qquad (10)$$

где $\varphi_n\equiv\varphi(x,\xi_n),\quad n=1,2,...,N$.

Вектор-функция $\psi(x,\xi)$ имеет интегральное представление

$$\psi(x,\xi)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{i\xi x}+\int_x^{+\infty}K(x,s)e^{i\xi s}ds,$$

ядро $K(x,y)=\begin{pmatrix}K_1(x,y)\\K_2(x,y)\end{pmatrix}$ не зависит от ξ и связано с потенциалом $u(x)$ ра-венством

$$u(x)=-2K_1(x,x).$$

Компоненты ядра $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ при $y>x$ можно найти, решая интеграль-ное уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K_1(x,y)-F^*(x+y)+\int_x^{+\infty}\int_x^{+\infty}K_1(x,y)F(z+s)F^*(s+y)dsdz=0,$$

где

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b(\xi)}{a(\xi)}e^{i\xi x}d\xi-i\sum_{j=1}^{N}C_je^{i\xi_j x}.$$

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Если вектор-функции $Y(x,\zeta)$ и $Z(x,\eta)$ являются решениями уравнений $LY=\zeta Y$ и $LZ=\eta Z$, то для их компонент справедливы равенства

$$\frac{d}{dx}(y_1z_2-y_2z_1)=-i(\zeta-\eta)(y_1z_2+y_2z_1),$$

$$\frac{d}{dx}(y_1z_1^*+y_2z_2^*)=-i(\zeta-\eta^*)(y_1z_1^*-y_2z_2^*).$$

Это лемма доказывается непосредственной проверкой.

ЭВОЛЮЦИЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ

В этом параграфе мы рассматриваем уравнение

$$\begin{cases}\mu_x=(u\cdot u^*)_t,\\ iu_{xt}+2\mu u+iu_x=iG.\end{cases}\qquad(11)$$

где $G=G(x,t)$ достаточно гладкая функция, при любом неотрицательном t удовлетворяющая условию

$$G(x,t)=o(1)\text{ при }\quad x\to\pm\infty.$$

Уравнение (11) рассматривается при начальном условии (2).

Лемма 2. Если потенциал $u(x,t)$, в системе уравнений (5), является решением уравнения (11) в классе функций (4), то данные рассеяния системы уравнений (5) меняются по t следующим образом

$$\frac{\partial r^+}{\partial t}=\frac{i}{\xi}(c^2+\xi)r^++\frac{1}{2\xi a^2(\xi)}\int_{-\infty}^{\infty}(G\varphi_2^2+G^*\varphi_1^2)dx,\quad(\operatorname{Im}\xi=0),$$

$$\frac{dC_n}{dt}=\left(i\left(1+\frac{c^2}{\xi_n}\right)+\frac{1}{2\xi_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(G^*h_{n1}\psi_{n1}+Gh_{n2}\psi_{n2}\right)dx\right)C_{n,}$$

$$\frac{d\xi_n}{dt}=\frac{i}{4\xi_n}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}(G^*\varphi_{n1}^2+G\varphi_{n2}^2)dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n1}\varphi_{n2}dx},\quad n=1,2,...,N.$$

Доказательство.

Систему (11) можно представить, как уравнение Лакса

$$L_t+[L,B]=R\,(11)$$

где $[L,\ B]=\ LB-BL$ и

$$L(t)=i\begin{pmatrix}\frac{d}{dx} & -u(x,t)\\ -u^*(x,t) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix},\ B=\frac{i}{2\xi}\begin{pmatrix}-\mu-\xi & -iu-u_t\\ iu^*-u_t^* & \mu+\xi\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}0 & -\frac{G}{2\xi}\\ \frac{G^*}{2\xi} & 0\end{pmatrix}$$

Пусть $\varphi(x,\xi,t)$ решение Йоста уравнения $L\varphi=\xi\varphi$.Дифференцируя это равенство по t получим

$$L_t\varphi+L\varphi_t=\xi\varphi_t,$$

подставляя L_t из (11) получим

$$(L-\xi)(\varphi_t-A\varphi)=R\varphi.\qquad(12)$$

Будем искать решение (12) в виде

$$\varphi_t-A\varphi=\alpha(x)\psi+\beta(x)\varphi.\qquad(13)$$

Для определения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ получим уравнение

$$M\alpha_x\psi+M\beta_x\varphi=R\varphi,\qquad(14)$$

где $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Согласно (7), имеем

$$\hat{\psi}^T M\varphi=\hat{\varphi}^T M\psi=a,\ \hat{\psi}^T M\psi=-\hat{\varphi}^T M\varphi=0,$$

где

$$\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_1\end{pmatrix},\quad \hat{\psi}=\begin{pmatrix}\psi_2\\ \psi_1\end{pmatrix}$$

Умножая (14) на $-\hat{\varphi}^T$ и $\hat{\psi}^T$ получим

$$\alpha_x = -\frac{\hat{\varphi}^T R\varphi}{a(\xi)}, \qquad \beta_x = \frac{\hat{\psi}^T R\varphi}{a(\xi)}. \quad (15)$$

Решая (15) получим

$$\alpha(x) = -\frac{1}{a(\xi)}\int_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi dx, \quad \beta(x) = \frac{1}{a(\xi)}\int_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi dx + \frac{i\left(c^2+\xi\right)}{2\xi}.$$

Таким образом, равенство (13) может быть переписано в виде

$$\varphi_t - A\varphi = -\frac{1}{a(\xi)}\int_{-\infty}^{x} \hat{\varphi}^T R\varphi dx \cdot \psi + \left(\frac{1}{a(\xi)}\int_{-\infty}^{x} \hat{\psi}^T R\varphi dx + \frac{i\left(c^2+\xi\right)}{2\xi}\right)\varphi. \quad (16)$$

Используя (7) и переходя в (16) к пределу при $x \to \infty$, с помощью определение коэффициента отражения для задачи рассеяния (5) получим

$$\frac{\partial r^+}{\partial t} = \frac{i}{\xi}\left(c^2+\xi\right)r^+ + \frac{1}{2\xi a^2(\xi)}\int_{-\infty}^{\infty}\left(G\varphi_2^2 + G^*\varphi_1^2\right)dx, \quad (\operatorname{Im}\xi = 0).$$

Дифференцируя равенство $\varphi_n = C_n\psi_n$ по t получим

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n} + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_n}\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{dC_n}{dt}\psi_n + C_n\left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n} + C_n\left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_n}\frac{d\xi_n}{dt}.$$

Подставляя вместо $\left.\frac{d}{d\xi}(\varphi - C_n\psi)\right|_{\xi=\xi_n}$ его выражение через $h_n(x)$ из (8) получим

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} = \frac{dC_n}{dt}\psi_n + C_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n)h_n\frac{d\xi_n}{dt}, \quad (17)$$

где $\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} \equiv \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n}$.

Аналогично непрерывному спектру в случае непрерывного спектра, для дискретного спектра получим равенство

$$\frac{\partial\varphi_n}{\partial t} - A\varphi_n = \left(\frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{x}\hat{\varphi}_n^T R\varphi_n dx\right)h_n + \left(-\frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{x}\hat{h}_n^T R\varphi_n\, dx + \frac{i}{2\xi_n}\left(c^2+\xi_n\right)\right)\varphi_n,$$

которое является аналогом равенства (16) для непрерывного спектра. Согласно (17), последнее равенство может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}&\frac{dC_n}{dt}\psi_n + C_n\frac{\partial\psi_n}{\partial t} - \dot{a}(\xi_n)\frac{d\xi_n}{dt}h_n - C_nA\psi_n = \\ &= \left(\frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{x}\hat{\varphi}_n^T R\varphi_n dx\right)h_n + \left(-\frac{1}{C_n}\int_{-\infty}^{x}\hat{h}_n^T R\varphi_n\, dx + \frac{i}{2\xi_n}\left(c^2+\xi_n\right)\right)C_n\psi_n\end{aligned} \quad (18)$$

Используя асимптотики (9) и переходя в (18) к пределу $x \to \infty$, получим

$$\frac{dC_n}{dt} = \frac{i}{\xi_n}\left(c^2 + \xi_n\right)C_n - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_n R\varphi_n dx,$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = -\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_n R\varphi_n \, dx}{C_n \dot{a}(\xi_n)},$$

где $\dot{a}(\xi_n) = -\frac{2i}{\xi_n}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n1}\varphi_{n2}dx.$

Следовательно, имеем

$$\frac{dC_n}{dt} = \left(i\left(1 + \frac{c^2}{\xi_n}\right) + \frac{1}{2\xi_n}\int_{-\infty}^{\infty}\left(G^* h_{n1}\psi_{n1} + G h_{n2}\psi_{n2}\right)dx \right) C_{n,},$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = \frac{i}{4\xi_n}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(G^*\varphi_{n1}^2 + G\varphi_{n2}^2)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{n1}\varphi_{n2}dx}, \quad n = 1,2,...,N.$$

Лемма 2 доказана.

Согласно, условием функции $A_k(t)$ в формуле (3) и равенствам (7*) правую часть в уравнении (1), можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{2N}\left(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2\right) = 2\sum_{\substack{k=1 \\ \mathrm{Im}\,\xi_k > 0}}^{N}\left(\Phi_{k1}^2 - \Phi_{k2}^2\right).$$

Список литературы

1. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
2. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
3. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.
4. Мельников В.К. Интегрирование нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1989. — Т. 53, № 3. — С. 581–606.
5. Зенчук П.Н. Метод обратной задачи рассеяния для уравнений с самосогласованным источником // Теоретическая и математическая физика. — 1998. — Т. 116, № 2. — С. 177–187.
6. Шабат А.Б. Обратная задача рассеяния для системы дифференциальных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. — 1975. — Т. 9, Вып. 3. — С.