Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

BO‘LAKLASHLAR KOMBINATORIKASI

Jalilov Shaxriyor Sobirovich
Qarshi davlat texnika universiteti assistenti
jalilovshaxriyor10@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.24110874

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada Kombinatorikada o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va gruppalashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda bo‘laklashlarga doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar turli vaziyatlarda paydo bo‘lishlari mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko‘phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko‘rsatkichini bo‘laklashda va hokazo.Modellarni o’rganish natijasida obyektlarga nisbatan xulosalar chiqariladi.

Kalit so’zlar: O’rin almashtirish, o’rinlashtirish, bo’laklash, toq son, obyekt.

ANNOTATION

This article examines problems related to partitions in combinatorics, alongside those solved using the concepts of permutations, arrangements, and combinations. Such problems can arise in various situations—for instance, when placing objects into boxes, transmitting information, making change, or partitioning an exponent for use in polynomial formulas. Conclusions regarding the objects are drawn based on the study of these models.

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматриваются задачи комбинаторики, которые можно решить с помощью понятий перестановок, подстановок и группировок, а также задачи, связанные с дробями. Такие задачи могут возникать в различных ситуациях. Например, при размещении объектов в ящике, передаче информации, делении денег, делении степени для использования формулы многочлена и т. д. В результате изучения моделей делаются выводы об объектах.

Bo‘laklashlar ta’rifi. Kombinatorikada o‘rin almashtirishlar, o‘rinlashtirishlar va gruppalashlar tushunchalari yordamida yechiladigan masalalar bilan bir qatorda bo‘laklashlarga doir masalalar ham qaraladi. Bunday masalalar turli vaziyatlarda paydo bo‘lishlari mumkin. Masalan, qutiga predmetlarni joylashda, axborotni uzatishda, pulni maydalashda, ko‘phad formulasidan foydalanish uchun daraja ko‘rsatkichini bo‘laklashda va hokazo.

Bo‘laklashlarga doir masalalar orasida natural sonlarni natural yoki manfiymas butun qo‘shiluvchilar yig‘indisi sifatida tasvirlash masalasi alohida o‘rin tutadi. Bu masalaning mohiyati quyidagidan iborat.

Berilgan natural n sonni $a_1, a_2, \dots, a_k$ natural sonlar yig‘indisi ko‘rinishda ifodalash imkoniyatlari qancha?

Bu masala turli shartlarda qaralishi mumkin. Masalan:

- qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olinishi yoki olinmasligi mumkin;

- bo‘laklashlarda faqat juft yoki toq sondagi qo‘shiluvchilar qatnashish sharti qo‘yilishi mumkin;
- qo‘shiluvchilar bir-biridan farqli yoki ixtiyoriy deb hisoblanishi mumkin va hokazo.

Tabiiyki, bo‘laklashlarga doir kombinatorik masalalarni yechishda, bo‘laklanayotgan son o‘rniga undan kichikroq son(lar)ni bo‘laklash yoki qaralayotgan bo‘laklashni kamroq sondagi qo‘shiluvchilari bo‘lgan bo‘laklashga keltirish usuli qo‘llanilishi maqsadga muvofiqdir.

Ta’rif. Natural n sonni ixtiyoriy k ta (k– natural son,$k \le n$) $a_1, a_2, \dots, a_k$ natural sonlar yig‘indisi, ya’ni $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ ko‘rinishda tasvirlashga n **sonni** k**ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklash** (qisqacha, **bo‘laklash**) deb ataladi.

Yuqorida ta’kidlaganimizdek, bo‘laklash masalasini ikki vaziyatda, ya’ni qo‘shiluvchilar tartibi e’tiborga olingan yoki olinmagan hollarda qarash mumkin. Kombinatorik nuqtai nazardan olganda ikkala hol ham qiziqarlidir.

Bo‘laklash masalasini, avvalo, **qo‘shiluvchilar tartibie’tiborga olingan** holda qaraymiz.

Bu holda natural n sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari sonini $B(k, n)$ bilan va shu sonning barcha bo‘laklanishlari sonini $B(n)$ bilan belgilasak, ravshanki, $B(n) = \sum_{k=1}^{n} b(k, n)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Misol. Faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari sonini aniqlash talab etilgan bo‘lsin.

Tabiiyki, har bir qadamda faqat bittadan pog‘onani bosib o‘tib, zinapoyani 5 qadamda hatlab o‘tish mumkin. Bu harakatni 5 sonning $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ko‘rinishda bo‘laklanishi kabi ifodalab, $B(5,5) = 1$ ekanligini qayd etamiz. Zinapoyani 4 qadamda ham hatlab o‘tish mumkin, bu ishning $B(5,4) = 4$ imkoniyati bor:

$5 = 2 + 1 + 1 + 1, 5 = 1 + 2 + 1 + 1, 5 = 1 + 1 + 2 + 1$ va $5 = 1 + 1 + 1 + 2$.

Shu usulda davom etib, 3 qadam uchun $B(5,3) = 6$ ta – $5 = 3 + 1 + 1, 5 == 1 + 3 + 1, 5 = 1 + 1 + 3, 5 = 2 + 2 + 1, 5 = 2 + 1 + 2, 5 = 1 + 2 + 2$ hamda 2 qadam uchun$B(5,2) = 4$ ta – $5 = 4 + 1, 5 = 3 + 2, \ 5 = 2 + 3, 5 = 1 + 4$ tengliklarni yozamiz. Endi barcha pog‘onalarni bir qadamda hatlab o‘tishga $B(5,1) == 1$ imkoniyat va $5 = 5$ tenglik mos kelishini e’tiborga olsak, mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlarni bayon qilgan bo‘lamiz.

Shunday qilib, faqat bir yo‘nalishda harakatlanganda besh pog‘onali zinapoyani hatlab o‘tish imkoniyatlari soni

$$B(5) = B(5,1) + B(5,2) + B(5,4) + B(5,5) = 16$$

bo‘ladi.

Endi $B(n, k)$ va $B(n)$ miqdorlarni hisoblash formulalarini topish bilan shug‘ullanamiz.

Dastlab $n = 1$ bolgan holni qaraymiz. Tabiiyki, birni natural sonlar yig‘indisi qilib bo‘laklash haqida gap bo‘lishi mumkin emas. Shunday bo‘lishiga qaramasdan, birni faqat bitta qo‘shiluvchidan iborat deb qarab, yuqorida berilgan ta’rifga mos keluvchi $B(1,1) = 1 = C_0^0 = C_{1-1}^0 = C_{n-1}^0$ ta bo‘laklashga ega bo‘lamiz. Jami bo‘laklashlar soni $B(1) = B(1,1) = C_{n-1}^0 = 2^{n-1}$ bo‘ladi.

$n = 2$bo‘lgan holda $k = 1$ qo‘shiluvchili $B(2,1) = 1 = C_1^0 = C_{2-1}^0 = C_{n-1}^1$ ta

$(2 = 2)$ va $k = 2$ qo‘shiluvchili $B(2,2) = 1 = C_1^1 = C_{2-1}^1 = C_{n-1}^1$ ta $(2 = 1 + 1)$ bo‘laklashlarga ega bo‘lamiz. Bu hol uchun jami bo‘laklashlar soni

$$B(2) = B(2,1) + B(2,2) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 = 2^{n-1}.$$

Agar $n = 3$ bo‘lsa, u holda $k = 1$ qo‘shiluvchili $B(3,1) = 1 = C_2^0 = C_{3-1}^0 == C_{n-1}^0$ ta $(3 = 3)$, $k = 2$ qo‘shiluvchili $B(3,2) = 2 = C_2^1 = C_{3-1}^1 = C_{n-1}^1$ ta $(3 = 2 + 1 = 1 + 2)$ va $k = 3$ qo‘shiluvchili

$B(3,3) = 1 = C_2^2 = C_{3-1}^2 = C_{n-1}^2$ ta $(3 = 1 + 1 + 1)$ bo‘laklashlar bor. Bu holda jami bo‘laklashlar soni uchun

$$B(3) = B(3,1) + B(3,2) + B(3,3) = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 = 2^{n-1}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shunday davom etib, “istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $(n-1)$ ta elementdan $(k-1)$ talab gruppalashlar soniga teng, ya’ni $B(n,k) = C_{k-1}^{k-1}$” degan farazga kelish mumkin. Agar bu faraz tasdiqlansa, binomial koeffitsientlarning yig‘indisi haqidagi xossasiga ko‘ra, $B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = 2^{n-1}$ bo‘ladi.

Teorema. Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda istalgan n natural sonning k ta qo‘shiluvchilarga bo‘laklanishlari soni $(n-1)$ ta elementdan $(k-1)$ talab gruppalashlar soniga teng, ya’ni $B(n,k) = C_{k-1}^{k-1}$.

Teorema. Qo‘shiluvchilar tartibini e’tiborga olgan holda ixtiyoriy n natural sonning barcha bo‘laklanishlari soni 2^{n-1} ga teng, ya’ni $B(n) = 2^{n-1}$.

Misol. To‘qqiz qavatli binoning birinchi qavatidan sakkiz kishi liftda yuqoriga ko‘tarilayotgan bo‘lsin. Agar to‘qqizinchi qavatga liftdagi kishilarning faqat bittasi chiqishi shart bo‘lsa, lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari sonini aniqlang.

Yechish. Masalaning shartiga binoan, liftdagi sakkiz kishidan faqat bir kishi to‘qqizinchi qavatga chiqishi shart bo‘lgani uchun, qolgan yetti kishining ikkinchi qavatdan sakkizinchi qavatgacha chiqishining ko‘p imkoniyatlari bor. Bu imkoniyatlar soni liftning birinchi va to‘qqizinchi qavatlar orasidagi to‘xtashlar sonidan bog‘liq bo‘lib, yettining barcha bo‘laklanishlari yordamida ifodalanishi mumkin. Masalan, lift binoning ikkinchi qavatidan sakkizinchi qavatigacha faqat bir marta to‘xtab, liftdagi yetti kishi tushib qolgan bo‘lsa, u holda bu hodisa $7 = 7$ ko‘rinishdagi bo‘laklash vositasida ifodalanadi; agar to‘qqizinchi qavatgacha lift ikki marta to‘xtab, oldin uch kishi, keyin to‘rt kishi tushib qolgan bo‘lsa, bu holatga $7 = 3 + 4$ ko‘rinishdagi bo‘laklash mos keladi va hokazo.

Yuqoridagi berilgalardan foydalanib yettining barcha bo‘laklanishlari soni $2^{7-1} = 2^6 = 64$ ekanligini topamiz. Demak, agar to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishi chiqishi shart bo‘lsa, u holda lift yo‘lovchilarining bino qavatlariga chiqish imkoniyatlari soni 64 ga tengdir. Agar hal qilingan masalada to‘qqizinchi qavatga faqat bir kishining chiqishi sharti bo‘lmasa edi, u holda sakkizning barcha bo‘laklanishlari sonini topishga to‘g‘ri kelar edi.

Adabiyotlar

1. A.Soleyev, X.Nosirova, Ya.Muxtorov, T.Buriyev. MATEMATIKA (iqtisodchilar uchun amaliy mashg’ulotlar). Samarqand 2017-y.
2. Iqtisodchilar uchun matematika. T. 2016-y
3. X.M.Shodimetov, N.A.Asqarov, B.N.Abduqayumov. Iqtisodiy-matematik usullar va modellar toshkent 2010
4. Карасев А. И. и др. «Математические методы и модели в планировании», «Экономика», 1987