Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

DYUAMEL PRINSIPI YORDAMIDA BIR JINSLI BO‘LMAGAN ISSIQLIK O‘TKAZUVCHANLIK VA TO‘LQIN TENGLAMALARI UCHUN ARALASH MASALALARNI YECHISH

Rasulov Nodirbek Qudrat o‘g‘li
Osiyo xalqaro universiteti
Muhandislik ta’lim va boshqaruv
kafedrasi 1-bosqich magistranti
https://doi.org/10.5281/zenodo.24281760

Annotatsiya: Maqolada bir jinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik va to‘lqin tenglamalari uchun chekli oraliqdagi aralash (boshlang‘ich-chegaraviy) masalalar Dyuamel prinsipi va Furye usuli yordamida yechilgan. Prinsipning to‘g‘riligi har ikkala tenglama uchun hosilalarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblash orqali isbotlangan, yechimlar xos funksiyalar bo‘yicha qator ko‘rinishida olingan, rezonans holatlari ajratilgan. Aniq yechimlar ikkita misolda chekli ayirmalar usuli bilan solishtirilgan: issiqlik tenglamasi uchun eng katta farq $5{,}5\cdot10^{-5}$ ni, to‘lqin tenglamasi uchun $2{,}2\cdot10^{-3}$ ni tashkil etdi.
Kalit so‘zlar: Dyuamel prinsipi, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, to‘lqin tenglamasi, aralash masala, Furye usuli, chekli ayirmalar usuli, rezonans.

SOLVING MIXED PROBLEMS FOR NONHOMOGENEOUS HEAT CONDUCTION AND WAVE EQUATIONS USING DUHAMEL’S PRINCIPLE

Abstract: The article solves mixed (initial-boundary) problems on a finite interval for nonhomogeneous heat conduction and wave equations using Duhamel’s principle and the Fourier method. The principle is verified for both equations by direct differentiation, the solutions are obtained as eigenfunction series, and the resonant cases are singled out. The exact solutions are compared with a finite difference scheme in two examples: the largest difference is $5.5\cdot10^{-5}$ for the heat equation and $2.2\cdot10^{-3}$ for the wave equation.
Keywords: Duhamel’s principle, heat conduction equation, wave equation, mixed problem, Fourier method, finite difference method, resonance.

РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ДЮАМЕЛЯ

Аннотация: В статье смешанные (начально-краевые) задачи на конечном отрезке для неоднородных уравнений теплопроводности и волнового уравнения решены с помощью принципа Дюамеля и метода Фурье. Принцип проверен для обоих уравнений прямым дифференцированием, решения получены в виде рядов по собственным функциям, выделены резонансные случаи. Точные решения сопоставлены с конечно-разностной схемой на двух примерах: наибольшее расхождение составило $5{,}5\cdot10^{-5}$ для уравнения теплопроводности и $2{,}2\cdot10^{-3}$ для волнового уравнения.
Ключевые слова: принцип Дюамеля, уравнение теплопроводности, волновое уравнение, смешанная задача, метод Фурье, метод конечных разностей, резонанс.

KIRISH

Issiqlik tarqalishi, torning tebranishi va akustik to‘lqinlar kabi ko‘plab fizik jarayonlar tashqi manba mavjud bo‘lganda bir jinsli bo‘lmagan xususiy hosilali tenglamalar bilan ifodalanadi. Bunday tenglamalarni bevosita yechish qiyin bo‘lgani uchun masala ikki qismga ajratiladi: manbasiz tenglamaning boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi va manbali tenglamaning nol boshlang‘ich shartlardagi yechimi. Ikkinchi qismni Dyuamel prinsipi bir jinsli tenglamaning yordamchi masalalari yechimlarini vaqt bo‘yicha integrallashga keltiradi [1].

Mavzuning dolzarbligi shundaki, Dyuamel usuli hozirgi kunda ham faol tadqiq etilmoqda: u to‘lqin tenglamasi uchun teskari masalalarda [2] va kasr tartibli umumlashmalarda [3] qo‘llanadi, bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin tenglamasi uchun aralash masalaning umumlashgan yechimlari ham o‘rganilmoqda [4; 5]. Shu bilan birga, o‘zbek tilidagi manbalarda prinsipni aniq misollar va sonli tekshiruv bilan keltiradigan qisqa bayon kam uchraydi. Maqolaning maqsadi Dyuamel prinsipi yordamida chekli oraliqdagi bir jinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik va to‘lqin tenglamalari uchun aralash masalalarni yechish tartibini asoslash, rezonans holatlarini ajratish va yechimlarni sonli usul bilan tekshirishdir.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Maqolaning asosiy nazariy manbasi Jakobsenning xususiy hosilali differensial tenglamalar bo‘yicha ma’ruzalar kursidir. Unda Dyuamel prinsipi bir jinsli bo‘lmagan to‘lqin va issiqlik tenglamalari uchun bayon qilingan, chekli oraliqdagi issiqlik tenglamasi uchun Furye qatori ko‘rinishidagi yechim keltirilgan, shuningdek chegaraviy shartlari bir jinsli bo‘lmagan masalalar chiziqli interpolyatsiya orqali bir jinsli chegaraviy shartlarga keltirilgan, issiqlik va to‘lqin tenglamalari uchun chekli ayirmalar sxemalarining turg‘unlik shartlari tahlil qilingan [1]. Ozarslan va Kürt kasr tartibli to‘lqin tenglamasi uchun vaqtga bog‘liq chegaraviy shartlar bilan bir jinsli bo‘lmagan masalani o‘zgaruvchilarni ajratish va Furye qatori usuli bilan yechib, yechimni uch parametrli Mittag-Leffler funksiyasi orqali ifodalagan [6]. O‘zbek tilidagi ishlardan Hamroyeva va Yunusov issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masalani Furye qatorlari va xos funksiyalar tizimi yordamida o‘rgangan [7], Jo‘rayeva va hammualliflar Grin funksiyalari yordamida issiqlik tenglamasini integral ko‘rinishda yechishni tahlil qilgan [8].

Usul sifatida Dyuamel prinsipini bevosita hosilalarni hisoblash orqali asoslash, Furye usuli bilan yordamchi masalalar yechimlarini qurish, aniq yechimlarga ega ikkita misolni tahlil qilish va ularni chekli ayirmalar usuli bilan sonli tekshirish qo‘llanildi. Chekli ayirmalar sxemalari uchun Jakobsen kitobidagi turg‘unlik shartlariga amal qilindi: issiqlik tenglamasi uchun aniq sxemada $s = a^2\Delta t/\Delta x^2 \le 1/2$, to‘lqin tenglamasi uchun $s = (a\Delta t/\Delta x)^2 \le 1$ [1]. Hisob-kitoblar Python tilida bajarilgan. Khromov va Kornev [4], Lomov [5], Umarov [3] va Artyushin [2] ishlari faqat bibliografik ma’lumotlari va sarlavhalari darajasida o‘rganilgan, shu bois ularga tayanish mavzuning ilmiy qiziqish yo‘nalishlarini ko‘rsatish bilan cheklandi.

NATIJALAR VA MUHOKAMA

Masalalarning qo‘yilishi. Birinchi masala (issiqlik o‘tkazuvchanlik): $0 < x < l$, $t > 0$ sohada quyidagi aralash masalani yechish talab qilinadi.

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),\quad u(0, t) = u(l, t) = 0,\quad u(x, 0) = \varphi(x). \quad (1)$$

Ikkinchi masala (to‘lqin tenglamasi, mahkamlangan uchli tor) quyidagicha beriladi.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t),\quad u(0, t) = u(l, t) = 0,\quad u(x, 0) = \varphi(x),\quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2)$$

Har ikkala masala chiziqli bo‘lgani uchun yechim $u = v + w$ ko‘rinishida izlanadi. Bu yerda v bir jinsli tenglamaning ($f = 0$) berilgan boshlang‘ich shartlardagi yechimi, w esa manbali tenglamaning nol

boshlang‘ich shartlardagi yechimi. v ni Furye usuli bilan topish standart [1], shuning uchun asosiy e’tibor w ni qurishga qaratiladi. Quyida λ_n = nπ/l, f_n(τ) = (2/l) ∫ f(ξ, τ) sin(λ_n ξ) dξ (integral 0 dan l gacha), φ_n va ψ_n esa φ va ψ ning sinuslar bo‘yicha Furye koeffitsiyentlari.

Dyuamel prinsipi (issiqlik tenglamasi). Har bir τ ≥ 0 uchun W(x, t; τ) funksiyasi t > τ da W_t = a² W_xx tenglamasini, W(0, t; τ) = W(l, t; τ) = 0 chegaraviy shartlarni va W(x, τ; τ) = f(x, τ) boshlang‘ich shartni qanoatlantirsin. U holda

w(x, t) = ∫ W(x, t; τ) dτ (integral 0 dan t gacha) (3)

funksiya w_t = a² w_xx + f(x, t) tenglamani, w(0, t) = w(l, t) = 0 shartlarni va w(x, 0) = 0 boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi. Isbot: (3) ni t bo‘yicha differensiallab, w_t = W(x, t; t) + ∫ W_t dτ = f(x, t) + a² ∫ W_xx dτ = f(x, t) + a² w_xx ni olamiz; chegaraviy shartlar W ning chegaraviy shartlaridan, boshlang‘ich shart esa integrallash oralig‘i nolga tengligidan kelib chiqadi. Xuddi shu hisob Jakobsenning umumiy bayonidagi parabolik holga mos keladi [1].

Yordamchi masalani Furye usuli bilan yechamiz:

W(x, t; τ) = Σ f_n(τ) exp(−a²λ_n²(t − τ)) sin(λ_n x). (4)

Natijada (1) masalaning to‘liq yechimi quyidagi ko‘rinishni oladi.

u(x, t) = Σ [φ_n exp(−a²λ_n² t) + ∫ f_n(τ) exp(−a²λ_n²(t − τ)) dτ] sin(λ_n x). (5)

(5) dagi birinchi had boshlang‘ich holatning so‘nishini, ikkinchi had esa manbaning to‘plangan ta’sirini bildiradi. Agar manba vaqtga bog‘liq bo‘lmasa, f = f(x), integral f_n (1 − exp(−a²λ_n² t)) / (a²λ_n²) ga teng bo‘ladi va t → ∞ da yechim −a² u'' = f tenglamaning statsionar yechimiga intiladi, bu natija Jakobsen kitobidagi misolga mos keladi [1].

Dyuamel prinsipi (to‘lqin tenglamasi). Bu holda W(x, t; τ) funksiyasi t > τ da W_tt = a² W_xx tenglamani, W(0, t; τ) = W(l, t; τ) = 0 shartlarni va W(x, τ; τ) = 0, W_t(x, τ; τ) = f(x, τ) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi, yechim esa yana (3) ko‘rinishida olinadi. Isbot: w_t = W(x, t; t) + ∫ W_t dτ = ∫ W_t dτ, chunki W(x, t; t) = 0; keyingi differensiallash w_tt = W_t(x, t; t) + ∫ W_tt dτ = f(x, t) + a² w_xx ni beradi, shuningdek w(x, 0) = 0 va w_t(x, 0) = 0 bajariladi [1]. Furye usuli bilan

W(x, t; τ) = Σ f_n(τ) sin(aλ_n(t − τ)) / (aλ_n) · sin(λ_n x), (6)

ya’ni (2) masalaning to‘liq yechimi quyidagicha yoziladi.

u(x, t) = Σ [φ_n cos(aλ_n t) + ψ_n sin(aλ_n t) / (aλ_n) + (1/(aλ_n)) ∫ f_n(τ) sin(aλ_n(t − τ)) dτ] sin(λ_n x). (7)

Cheksiz to‘g‘ri chiziqda to‘lqin tenglamasi uchun Dyuamel prinsipi d’Alamber formulasi bilan birga ishlatilib, yechimni u_p(x, t) = (1/(2a)) ∫dτ ∫ f(θ, τ) dθ ko‘rinishida beradi (ichki integral x − a(t − τ) dan x + a(t − τ) gacha, tashqi integral 0 dan t gacha); bu ifoda yechimning qiymati faqat xarakteristik uchburchakdagi ma’lumotlarga bog‘liqligini ko‘rsatadi [1].

Birinchi misol. f(x, t) = sin(πx/l) e^(−t), φ = 0 bo‘lsin. Bu holda f_1(τ) = e^(−τ), qolgan f_n = 0, va (5) dan u(x, t) = g(t) sin(πx/l) kelib chiqadi, bunda κ = a²π²/l² belgilash kiritilsa, g(t) = ∫ e^(−τ) e^(−κ(t − τ)) dτ .

g(t) = (e^(−t) − e^(−κt)) / (κ − 1) (κ ≠ 1); g(t) = t e^(−t) (κ = 1). (8)

Tekshiruv: g' + κg = e^(−t) va g(0) = 0 ekanligini bevosita hisoblash tasdiqlaydi, shuning uchun u = g(t) sin(πx/l) tenglamani va chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. κ = 1 holat vaqt bo‘yicha so‘nish tezliklarining mos kelishiga to‘g‘ri keladi va yechimga t ko‘paytuvchisini kiritadi, bu rezonansga o‘xshash hodisadir. 1-jadvalda l = π, a = 1/2 (ya’ni κ = 1/4) uchun x = π/2 nuqtadagi yechim keltirilgan; bu nuqtada sin(πx/l) = 1, shuning uchun u(π/2, t) = g(t).

1-jadval.

Issiqlik tenglamasi: u(π/2, t) qiymatlari

t	Dyuamel formulasi (8)	Chekli ayirmalar	Mutlaq farq
1	0,54790	0,54793	$4{,}0\cdot10^{-5}$
2	0,62826	0,62831	$5{,}3\cdot10^{-5}$

t	Dyuamel formulasi (8)	Chekli ayirmalar	Mutlaq farq
3	0,56344	0,56349	$5{,}5\cdot10^{-5}$
4	0,46609	0,46614	$5{,}3\cdot10^{-5}$

Izoh: l = π, a = 1/2, f = sin x · e^(−t); chekli ayirmalar sxemasi aniq, Δx = π/100, Δt = 10^{-4}, s = 0,0253. Manba: muallif hisob-kitobi.

Dyuamel integralining kvadratura usulida hisoblangan qiymatlari (8) formula natijalari bilan mos keldi, chekli ayirmalar sxemasi esa eng ko‘pi bilan $5{,}5\cdot10^{-5}$ ga farq qildi. Sxema fazoviy koordinata bo‘yicha ikkinchi tartibli aniqlikka ega, shuning uchun bu farq to‘rning qadami bilan izohlanadi.

Statsionar manba holati. Agar manba vaqtga bog‘liq bo‘lmasa va f(x) = sin(πx/l) bo‘lsa, f_1 = 1 bo‘ladi va (5) dan g(t) = (1 − e^(−κt))/κ olinadi. Bu natija Jakobsen kitobidagi misolga mos keladi: t → ∞ da yechim (l/(πa))² sin(πx/l) ga intiladi, bu funksiya $-a^2$ u = sin(πx/l), u(0) = u(l) = 0 masalaning statsionar yechimidir [1]. Demak, doimiy manbali sterjenda harorat cheksiz o‘smaydi, balki chegaralardagi sovutish bilan muvozanatlashadi.

Ikkinchi misol. To‘lqin tenglamasida f(x, t) = sin(πx/l) sin(ωt), φ = ψ = 0 bo‘lsin va Ω = aπ/l belgilansin. (7) dan u(x, t) = g(t) sin(πx/l) olinadi, bu yerda g(t) = (1/Ω) ∫ sin(ωτ) sin(Ω(t − τ)) dτ . Bu funksiya g'' + Ω^2g = sin(ωt), g(0) = g'(0) = 0 masalaning yechimi bo‘lgani uchun

g(t) = (sin ωt − (ω/Ω) sin Ωt) / ($\Omega^2 - \omega^2$) (ω ≠ Ω); g(t) = (sin Ωt − Ωt cos Ωt) / ($2\Omega^2$) (ω = Ω). (9)

Birinchi formulada g(0) = 0 va g'(0) = ω/($\Omega^2 - \omega^2$) − (ω/Ω)Ω/($\Omega^2 - \omega^2$) = 0 bevosita tekshiriladi. Ikkinchi formulada g'(t) = (t sin Ωt)/2, g''(t) = (sin Ωt + Ωt cos Ωt)/2 bo‘lgani uchun g'' + Ω^2g = sin Ωt bajariladi. ω = Ω da tashqi kuch chastotasi tor xususiy chastotasiga teng, amplituda esa t bilan chiziqli o‘sadi, bu klassik rezonans hodisasidir. 2-jadvalda l = π, a = 1 (Ω = 1), ω = 2 uchun x = π/2 nuqtadagi qiymatlar berilgan.

2-jadval.

To‘lqin tenglamasi: u(π/2, t) qiymatlari

t	Dyuamel formulasi (9)	Chekli ayirmalar	Mutlaq farq
1	0,25788	0,25625	$1{,}6\cdot10^{-3}$
2	0,85847	0,85891	$4{,}4\cdot10^{-4}$
3	0,18722	0,18695	$2{,}7\cdot10^{-4}$
4	−0,83432	−0,83352	$8{,}0\cdot10^{-4}$
5	−0,45794	−0,45571	$2{,}2\cdot10^{-3}$

Izoh: l = π, a = 1, ω = 2, f = sin x · sin 2t; chekli ayirmalar sxemasi aniq, Δx = π/200, Δt = Δx/2, s = 0,25. Manba: muallif hisob-kitobi.

Eng katta farq $2{,}2\cdot10^{-3}$ bo‘lib, u vaqt o‘tishi bilan to‘plangan faza xatosiga mos keladi. Ikki misolda ham Dyuamel formulasi bilan sonli yechim mos keldi, bu esa (5) va (7) yechimlarining to‘g‘riligini tasdiqlaydi, biroq tekshiruv faqat bitta Furye garmonikasi va bitta nuqta uchun o‘tkazilgan.

Qatorlarning yaqinlashishi. (5) qatorda n-chi had uchun |∫ f_n(τ) exp($-a^2\lambda_n^2$(t − τ)) dτ| ≤ M_n (1 − exp($-a^2\lambda_n^2$ t)) / ($a^2\lambda_n^2$) ≤ M_n l^2 / ($a^2\pi^2$ n^2) baho o‘rinli, bunda M_n = max |f_n(τ)|. Shu sababli f_n chegaralangan bo‘lsa, qator n^2 tezlikda kamayuvchi hadlar bilan yaqinlashadi. To‘lqin tenglamasi uchun (7) da shunga o‘xshash baho faqat |…| ≤ t M_n l / (aπ n) ni beradi, ya’ni hadlar 1/n kabi kamayadi va yaqinlashish f ning silliqligiga bog‘liq. Bu farq issiqlik tenglamasining silliqlovchi, to‘lqin tenglamasining esa ma’lumotlar silliqligini saqlovchi tabiatini aks ettiradi. Bu baholar muallif tomonidan oddiy tengsizliklar asosida olingan va yaqinlashishning to‘liq isboti hisoblanmaydi.

Yechish algoritmi. Prinsipni amalda qo‘llash olti qadamdan iborat: (1) f, φ va ψ ni sin(λ_n x) bo‘yicha Furye koeffitsiyentlariga yoyish; (2) bir jinsli tenglama uchun v ni qurish; (3) yordamchi W(x, t; τ) masalasini (4) yoki (6) ko‘rinishida yechish; (4) W ni τ bo‘yicha 0 dan t gacha integrallash; (5) u = v + w ni yig‘ish; (6) natijani tenglamaga, chegaraviy va boshlang‘ich shartlarga qo‘yib tekshirish.

Misollardagi g(t) funksiyalari uchun oltinchi qadam yuqorida bajarildi. Algoritm ketma-ketligi Jakobsenning umumiy sxemasiga mos keladi [1].

Yechimning yagonaligi. Qurilgan yechim yagona ekanligini energiya usuli bilan ko‘rsatish mumkin. Agar (1) masalaning ikkita yechimi bo‘lsa, ularning ayirmasi d bir jinsli tenglamani, nol chegaraviy va nol boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi. U holda E(t) = (1/2) ∫ d² dx (integral 0 dan l gacha) uchun E'(t) = ∫ d d_t dx = a² ∫ d d_xx dx = −a² ∫ d_x² dx ≤ 0 bo‘ladi, chunki chegaralarda d = 0. E(0) = 0 va E ≥ 0 bo‘lgani uchun E ≡ 0, ya’ni d ≡ 0. To‘lqin tenglamasi uchun E(t) = (1/2) ∫ (d_t² + a² d_x²) dx energiyasi vaqt bo‘yicha o‘zgarmaydi: E'(t) = ∫ d_t (d_tt − a² d_xx) dx = 0, bu yerda chegaralarda d_t = 0 ishlatildi. E(0) = 0 bo‘lgani uchun d_x ≡ 0 va d_t ≡ 0, chegaralarda d = 0 bo‘lgani sababli d ≡ 0. Bu standart hisob (5) va (7) yechimlarining yagona ekanligini asoslaydi.

Fizik talqin. Issiqlik tenglamasida f(x, t) sterjen ichidagi issiqlik manbasining quvvatiga mos keladi, chegaralardagi nol shart esa uchlari doimiy haroratda saqlanishini bildiradi. (5) formuladagi integral har bir τ momentda qo‘shilgan issiqlik ulushining t − τ vaqt davomida so‘nishini jamlaydi. To‘lqin tenglamasida f tor birligiga tushuvchi tashqi kuchga mos keladi va (7) dagi integral har bir τ momentdagi impulsning keyingi tebranishlarga ta’sirini yig‘adi. Har ikkala holatda ham tizim chiziqli, shuning uchun alohida manbalar ta’sirini qo‘shish mumkin. Bu superpozitsiya prinsipi Dyuamel usulining asosidir.

Ta’limda qo‘llash. Muhandislik ta’limida prinsipning qulayligi shundaki, bir jinsli masalani yechishni bilgan talaba manbali masalani yangi usulsiz hal qila oladi. Yuqoridagi 1- va 2-jadvallar kabi sonli tekshiruvlar talabaga formulaning to‘g‘riligini mustaqil tekshirish imkonini beradi. Bu pedagogik taklif empirik sinovdan o‘tkazilmagan.

Bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy shartlar. Agar u(0, t) = μ_1(t), u(l, t) = μ_2(t) bo‘lsa, v(x, t) = μ_1(t) + (x/l)(μ_2(t) − μ_1(t)) funksiyasi chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Jakobsen bu yondashuvni chiziqli interpolyatsiya orqali issiqlik tenglamasi uchun ko‘rsatgan [1]. w = u − v almashtirish issiqlik tenglamasida w_t = a² w_xx + f − μ_1' − (x/l)(μ_2' − μ_1') tenglamaga, to‘lqin tenglamasida esa w_tt = a² w_xx + f − μ_1" − (x/l)(μ_2" − μ_1") tenglamaga olib keladi, chunki v_xx = 0. Natijada masala bir jinsli chegaraviy shartlardagi (1) yoki (2) ko‘rinishiga keladi va yuqoridagi formulalar yangi manba bilan qo‘llanadi. To‘lqin tenglamasi uchun bu hisob Jakobsen yondashuvining oddiy umumlashtirishi bo‘lib, manbada faqat issiqlik tenglamasi uchun keltirilgan [1]. Ozarslan va Kürt kasr tartibli to‘lqin tenglamasida shunga o‘xshash vaqtga bog‘liq chegaraviy shartlarni o‘zgaruvchilarni ajratish va Laplas almashtirishi yordamida ko‘rib chiqqan [6].

Usulning chegaralari. Jakobsenning ta’kidlashicha, Dyuamel prinsipi yechimni τ bo‘yicha integral ko‘rinishida beradi va u kamdan-kam aniq bo‘ladi, aniq sonlarni olish uchun odatda sonli integrallash kerak; shu sababli chekli Furye almashtirishi qulayroq alternativa sifatida tavsiya etiladi [1]. Bu ikki yondashuv bir-biriga bog‘liq: koeffitsiyent c_n(t) uchun c_n' + a²λ_n² c_n = f_n(t) oddiy tenglamasining yechimi o‘zgarmasni variatsiyalash usulida aynan (5) dagi integralni beradi. Bu tenglik standart bo‘lib, maqolada u (5) formula bilan bevosita ko‘rsatildi, shu sababli bu ish doirasida ikkala usul bir xil formulaga olib keladi. Dyuamel prinsipining afzalligi uning yordamchi masalalarning tayyor yechimlarini qayta ishlatish imkoniyatida: boshqa chegaraviy shartlar yoki boshqa o‘lchovdagi sohada yordamchi masala almashadi, integrallash sxemasi esa o‘zgarmaydi.

XULOSA

Dyuamel prinsipi chekli oraliqdagi bir jinsli bo‘lmagan issiqlik o‘tkazuvchanlik va to‘lqin tenglamalari uchun aralash masalalarni ketma-ket yechish imkonini beradi: yordamchi masalaning yechimi (4) yoki (6) ko‘rinishida quriladi, so‘ng u τ bo‘yicha integrallanadi, natijada (5) va (7) yechimlari hosil bo‘ladi. Issiqlik tenglamasi uchun yechim eksponensial, to‘lqin tenglamasi uchun tebranma xarakterga ega; ikkala holatda rezonans alohida ko‘rinishga ega: κ = 1 da g(t) = t e^(−t), ω = Ω da esa amplituda t bilan o‘sadi. Aniq yechimlar chekli ayirmalar usuli bilan tekshirilganda eng katta farq

issiqlik tenglamasi uchun $5{,}5\cdot10^{-5}$ ni, to‘lqin tenglamasi uchun $2{,}2\cdot10^{-3}$ ni tashkil etdi. Tadqiqotning cheklovlari: tekshiruv bitta garmonika va bitta nuqta uchun bajarilgan, ayrim ilmiy manbalar faqat sarlavha darajasida o‘rganilgan, bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy shartlar uchun to‘lqin tenglamasidagi hisob misol bilan tekshirilmagan. Keyingi tadqiqotlar uchun umumiy f(x, t) manbalari, ko‘p o‘lchovli sohalar va kasr tartibli tenglamalar uchun Dyuamel prinsipining sonli tekshiruvini davom ettirish tavsiya etiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Jakobsen P. K. An Introduction to Partial Differential Equations. – Tromsø: The Arctic University of Norway, 2019. – 226 p. – arXiv:1901.03022. – URL: https://arxiv.org/abs/1901.03022 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
2. Artyushin A. N. The Duhamel method in inverse problems for the wave equation. I // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 246, No. 6. – P. 763–778. – DOI: 10.1007/s10958-020-04779-0 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
3. Umarov S. Fractional Duhamel principle // Fractional Differential Equations. – Berlin; Boston: De Gruyter, 2019. – P. 383–410. – DOI: 10.1515/9783110571660-017 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
4. Khromov A. P., Kornev V. V. Classical and generalized solutions of a mixed problem for a nonhomogeneous wave equation // Doklady Mathematics. – 2019. – Vol. 99, No. 1. – P. 11–13. – DOI: 10.1134/S1064562419010034 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
5. Lomov I. S. The Fourier method and the generalized solution of the mixed problem for inhomogeneous wave equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – Vol. 45, No. 11. – P. 5603–5616. – DOI: 10.1134/S1995080224606465 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
6. Özarslan M. A., Kürt C. Nonhomogeneous initial and boundary value problem for the Caputo-type fractional wave equation // Advances in Difference Equations. – 2019. – Vol. 2019. – Art. 199. – DOI: 10.1186/s13662-019-2110-8 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
7. Hamroyeva Z. Q., Yunusov G‘. G‘. Yuqori tartibli hosila qatnashgan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masala // Renessans ta’lim xabarlari. – 2025. – Vol. 2, No. 2. – DOI: 10.64436/2.o654639 (murojaat sanasi: 16.11.2026).
8. Jo‘rayeva F. va boshq. Grin funksiyalari va issiqlik tenglamasi uchun qo‘llanilishi // Science and Technology in the Modern World. – 2026. – Vol. 5, No. 13. – B. 45–50. – DOI: 10.70413/zdift-v05-i13-p1-010 (murojaat sanasi: 16.11.2026).