Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARDA XOS QIYMATLAR VA MITTAG–LEFFLER FUNKSIYASINING MATEMATIK TAHLILI

Rahimova Munira Islombekovna
Osiyo Xalqaro Universiteti magistranti,
Matematika yo‘nalishi, 1-kurs.
https://doi.org/10.5281/zenodo.24282281

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada kasr tartibli differensial tenglamalarning spektral masalalarini o‘rganishda xos qiymatlar va Mittag–Leffler funksiyasining matematik ahamiyati tahlil qilinadi. Kasr tartibli hosilalarga asoslangan differensial tenglamalarning nazariy xususiyatlari, spektral parametrlarning yechimlarga ta’siri hamda maxsus funksiyalar yordamida analitik yechimlarni aniqlash masalalari ko‘rib chiqiladi. Riman–Liuvill va Kaputo hosilalarining matematik mazmuni, ularning o‘zaro farqlari va qo‘llanilish imkoniyatlari yoritiladi. Shuningdek, kasr tartibli tenglamalarning klassik differensial tenglamalardan farqli jihatlari, xos funksiyalarning xususiyatlari va spektral parametrlarni aniqlash usullari o‘rganiladi. Tadqiqot natijalari kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasini chuqurroq o‘rganish va ularni amaliy matematik masalalarda qo‘llash uchun nazariy asos yaratadi.

Kalit so‘zlar: kasr tartibli differensial tenglama, xos qiymat, xos funksiya, Mittag–Leffler funksiyasi, spektral parametr, Kaputo hosilasi, Riman–Liuvill hosilasi, matematik analiz.

Kasr tartibli differensial tenglamalar zamonaviy matematik analizning rivojlanib borayotgan yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi. Ushbu nazariya klassik differensial hisoblash tushunchalarini umumlashtirib, hosila tartibini butun sonlar bilan cheklamasdan, haqiqiy va ayrim hollarda kompleks qiymatlarda ifodalash imkonini beradi. Mazkur yondashuv murakkab fizik, mexanik va texnologik jarayonlarni matematik modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa, xotira effektiga ega tizimlarda kasr tartibli differensial tenglamalardan foydalanish samarali natijalar beradi [1].

Kasr tartibli differensial tenglamalarni tadqiq qilishda spektral masalalar alohida o‘rin egallaydi. Spektral masalalarning asosiy maqsadi differensial operatorning xos qiymatlari va ularga mos xos funksiyalarni aniqlashdan iborat. Umumiy holda bunday masala quyidagicha yoziladi:

[
\mathcal{L}_{\alpha}u(x)=\lambda u(x),
]

bu yerda (\mathcal{L}_{\alpha}) kasr tartibli differensial operator, (\lambda) spektral parametr, (u(x)) esa izlanayotgan funksiya hisoblanadi. Agar ushbu tenglama nolga teng bo‘lmagan yechimga ega bo‘lsa, (\lambda) operatorning xos qiymati, (u(x)) esa unga mos xos funksiya deyiladi. Spektral parametrlarning xususiyatlarini o‘rganish differensial tenglamalar yechimlarining tuzilishi va barqarorligini tahlil qilish imkonini beradi.

Kasr tartibli differensial hisobda Riman–Liuvill va Kaputo hosilalari eng ko‘p qo‘llaniladigan ta’riflar hisoblanadi. Riman–Liuvill hosilasi integral operator orqali aniqlanadi va funksiyaning oldingi qiymatlarini ham hisobga oladi. Kaputo hosilasi esa avval funksiyaning butun tartibli hosilasini hisoblash, keyin kasr tartibli integralni qo‘llash orqali aniqlanadi. Ushbu ikki yondashuvning farqi boshlang‘ich shartlarni berishda yaqqol namoyon bo‘ladi. Kaputo hosilasi orqali ifodalangan tenglamalarda boshlang‘ich shartlarni klassik differensial tenglamalardagi kabi belgilash qulayligi sababli u amaliy matematikada keng qo‘llaniladi [1, 2].

Kasr tartibli differensial tenglamalarning analitik yechimlarini topishda Mittag–Leffler funksiyasi muhim matematik vosita hisoblanadi. Ushbu funksiya eksponensial funksiyaning kasr tartibli hisoblashdagi umumlashmasi sifatida qaraladi. Uning bir parametrli ko‘rinishi quyidagicha aniqlanadi:

[
E_{\alpha}(z)=
\sum_{k=0}^{\infty}
\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}.
]

Ikki parametrli Mittag–Leffler funksiyasi esa:

[
E_{\alpha,\beta}(z)=
\sum_{k=0}^{\infty}
\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.
]

Bu yerda (\Gamma) Gamma funksiyasi bo‘lib, u faktorial tushunchasining umumlashmasi hisoblanadi. Mittag–Leffler funksiyasi kasr tartibli differensial tenglamalarning yechimlarini ifodalashda, ularning asimptotik xususiyatlarini o‘rganishda va spektral masalalarni tahlil qilishda keng foydalaniladi [3].

Masalan, quyidagi kasr tartibli differensial tenglamani qaraymiz:

[
{}^CD_{0+}^{\alpha}u(t)+\lambda u(t)=0, \qquad 0<\alpha<1.
]

Ushbu tenglamaning boshlang‘ich sharti (u(0)=u_0) bo‘lganda yechimi:

[
u(t)=u_0E_{\alpha}(-\lambda t^\alpha)
]

ko‘rinishida ifodalanadi. Bu formula kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarida Mittag–Leffler funksiyasining asosiy rolini ko‘rsatadi. Klassik birinchi tartibli differensial tenglamalarda eksponensial funksiya asosiy yechim shakli bo‘lsa, kasr tartibli tenglamalarda uning o‘rnini ko‘pincha Mittag–Leffler funksiyasi egallaydi.

Spektral masalalarda mazkur funksiyaning nollari alohida ahamiyatga ega. Ayrim chegaraviy masalalarda chegaraviy shartlarni qo‘llash natijasida xos qiymatlarni aniqlash maxsus funksiyaning nolga teng bo‘lish shartiga keltiriladi. Bunday yondashuv differensial tenglamaning spektral xususiyatlarini o‘rganishni osonlashtiradi. Biroq xos qiymatlarning haqiqiyligi, musbatligi yoki diskretligi har bir operator va chegaraviy shart uchun alohida asoslanishi lozim.

Zayernouri va Karniadakis tomonidan olib borilgan tadqiqotlarda kasr tartibli Sturm–Liouville spektral masalalari nazariy va sonli jihatdan o‘rganilgan. Mualliflar kasr tartibli operatorlar uchun maxsus xos funksiyalar va ularni sonli yaqinlashtirish usullarini tahlil qilganlar [4]. Ushbu tadqiqotlar kasr tartibli differensial tenglamalarni spektral usullar yordamida yechish imkoniyatlarini kengaytirgan.

Aleroev va Li tomonidan 2025-yilda chop etilgan ilmiy tadqiqotda Kaputo hosilasiga asoslangan ayrim kasr tartibli Sturm–Liouville masalalarida asosiy xos qiymat mavjud bo‘lmasligi mumkinligi ko‘rsatilgan [5]. Bu natija kasr tartibli operatorlarning spektral xususiyatlari klassik differensial operatorlardan farq qilishini tasdiqlaydi. Shuningdek, kasr tartibli spektral nazariyada operatorning ta’rifi va chegaraviy shartlarni to‘g‘ri tanlash naqadar muhim ekanligini ko‘rsatadi.

Kasr tartibli differensial tenglamalarning amaliy ahamiyati ham juda keng. Masalan, anomal diffuziya jarayonlarida zarrachalarning tarqalishi klassik diffuziya qonunlaridan farq qilishi mumkin. Bunday jarayonlarni matematik ifodalashda kasr tartibli hosilalardan foydalaniladi. Shuningdek,

viskoelastik materiallarning deformatsiyasi, murakkab muhitlarda issiqlik almashinuvi va xotira effektiga ega dinamik tizimlarni o‘rganishda ham ushbu tenglamalar muhim ahamiyatga ega. Spektral tahlil orqali bunday jarayonlarning barqarorligi va matematik xususiyatlarini baholash mumkin.

Xos qiymatlar va Mittag–Leffler funksiyasining o‘zaro bog‘liqligini o‘rganish kasr tartibli differensial tenglamalar nazariyasining muhim yo‘nalishlaridan biridir. Ushbu masalalarni tadqiq qilish orqali operatorlarning spektral tuzilishi, yechimlarning xususiyatlari va chegaraviy shartlarning ta’siri haqida muhim matematik xulosalar olish mumkin. Kelgusida Mittag–Leffler funksiyasining nol nuqtalarini sonli aniqlash, spektral parametrlarning kasr tartibga bog‘liqligini tekshirish va turli chegaraviy masalalarni taqqoslash ushbu yo‘nalishdagi tadqiqotlar uchun istiqbolli vazifalar hisoblanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Podlubny I. Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego, 1999.
2. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer, Berlin, 2010.
3. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Springer, 2014.
4. Zayernouri M., Karniadakis G.E. Fractional Sturm–Liouville Eigen-Problems: Theory and Numerical Approximation. Journal of Computational Physics, 252, 2013, pp. 495–517.
5. Aleroev T.S., Li Y. The Fractional Sturm-Liouville Problem with the Caputo Derivative May Lose the Principal Eigenvalue. Fractional Calculus and Applied Analysis, 28, 2025, pp. 1706–1716.