Ilmiy tadqiqotlar va ularning yechimlari jurnali
Aoka guvohnoma № 323759 ISSN: 3060-4818

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Х.К. Абдурахманова
Доцент
Ташкентский институт
текстильной и легкой промышленности
https://doi.org/10.5281/zenodo.24393468

АННОТАЦИЯ: Данная учебно-методическая работа посвящена изучению локальной теоремы Лапласа и её практическому применению в теории вероятностей. В работе рассматриваются основные положения локальной теоремы Лапласа, условия её применения, математические формулы и способы приближённого вычисления вероятностей наступления определённого числа событий в серии независимых испытаний. Особое внимание уделено связи локальной теоремы Лапласа с нормальным распределением, использованию функции Лапласа и таблиц её значений при решении практических задач.

Ключевые слова: локальная теорема Лапласа, теория вероятностей, независимые испытания, схема Бернулли, нормальное распределение, функция Лапласа, случайная величина, математическое ожидание, стандартное отклонение, вероятность события.

Локальная теорема Лапласа является частью центральной предельной теоремы и формулируется следующим образом: при соблюдении определенных условий сумма большого числа независимых и одинаково распределенных случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному. Под локальной теоремой Лапласа понимается более точная оценка для плотности нормального распределения вблизи среднего значения, чем предлагает центральная предельная теорема. Она позволяет более точно аппроксимировать распределение суммы случайных величин. Локальная теорема Лапласа часто применяется в статистике и теории вероятностей для анализа данных и предсказания результатов экспериментов. Она является важным инструментом для работы с большими объемами данных и исследований в различных областях науки. Определение: Если вероятность p появления случайного события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

При этом, чем больше n, тем рассчитанная вероятность $P_n(m)$ будет лучше приближать точное значение P_n^m, полученное (хотя бы гипотетически) по формуле Бернулли. Рекомендуемое минимальное количество испытаний – примерно 50-100, в противном случае результат $P_n(m)$ может оказаться далёким от истины. Кроме того, локальная теорема Лапласа работает тем лучше, чем вероятность p ближе к 0,5, и наоборот – даёт существенную погрешность при значениях p, близких к нулю либо единице. По этой причине ещё одним

критерием эффективного использования формулы $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$ является выполнение неравенства $npq > 10$ (≈ 10).

Так, например, если $n = 50,\ p = 0,5$, то $npq = 50 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 12,5 > 10$ и применение теоремы Лапласа для 50 испытаний оправдано. Но если $n = 50$ и $p = 0,1$, то $npq = 50 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 4,5 < 10$ и приближение $P_n(m)$ (к точному значению P_n^m) будет плохим. О том, почему $P_n(m) \approx P_n^m$ и об особенной функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ мы поговорим на уроке о **нормальном распределении вероятностей**, а пока нам потребуется формально-вычислительная сторона вопроса. В частности, важным фактом является **чётность** этой функции: $\varphi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$.

Оформим официальные отношения с нашим примером:

Задача 1. Монета подбрасывается 400 раз. Найти вероятность того, что орёл выпадет ровно:

а) 200 раз;

б) 225 раз.

С чего начать **решение**? Сначала распишем известные величины, чтобы они были перед глазами:

– общее количество независимых испытаний;

– вероятность выпадения орла в каждом броске; – вероятность выпадения решки.

а) Найдём вероятность того, что в серии из 400 бросков орёл выпадет ровно $m = 200$ раз. Ввиду большого количества испытаний используем локальную теорему Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

На первом шаге вычислим требуемое значение аргумента:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 400 \cdot 0,5}{\sqrt{400 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{200 - 200}{\sqrt{100}} = \frac{0}{10} = 0$$

Далее находим соответствующее значение функции: $\varphi(0)$. Это можно сделать несколькими способами. В первую очередь, конечно же, напрашиваются непосредственные вычисления:

$$\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,3989$$

Округление проводят, как правило, до 4 знаков после запятой.

Недостаток прямого вычисления состоит в том, что экспоненту переваривает далеко не каждый микрокалькулятор, кроме того, расчёты не особо приятны и отнимают время. Зачем так

мучиться? Используйте **калькулятор по терверу** (пункт 4) и получайте значения $\varphi(x)$ моментально!

Кроме того, существует таблица значений функции $\varphi(x)$, которая есть практически в любой книге по теории вероятностей, в частности, в учебном пособии В.Е. Гмурмана. Закачайте, кто ещё не закачал – там вообще много полезного ;-) **И обязательно научитесь пользовать таблицей (прямо сейчас!)** – подходящей вычислительной техники всегда может не оказаться под рукой! На заключительном этапе применим формулу $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$:

$P_{400}(200) \approx \frac{1}{10} \cdot \varphi(0) \approx 0,1 \cdot 0,3989 = 0,03989$ – вероятность того, что при 400 бросках монеты орёл выпадет ровно 200 раз. Как видите, полученный результат очень близок к точному значению $P_{400}^{200} = 0,0398693019637926$, вычисленному по **формуле Бернулли**.

б) Найдём вероятность того, что в серии из 400 испытаний орёл выпадет ровно $m = 225$ раз. Используем локальную теорему Лапласа. Раз, два, три – и готово:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{225 - 200}{10} = \frac{25}{10} = 2,5$$

$$\varphi(2,5) \approx 0,0175$$

$P_{400}(225) \approx \frac{1}{10} \cdot \varphi(2,5) \approx 0,1 \cdot 0,0175 = 0,00175$ – искомая вероятность.

Ответ: а) $\approx 0,04$; б) $\approx 0,002$

Следующий пример, как многие догадались, посвящён деторождению – и это вам для самостоятельного решения :)

Задача 2. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно: а) 40 мальчиков, б) 50 мальчиков, в) 30 девочек. Результаты округлить до 4 знаков после запятой. Интересно тут звучит словосочетание «независимые испытания» =) Кстати, реальная **статистическая вероятность** рождения мальчика во многих регионах мира колеблется в пределах от 0,51 до 0,52. Примерный образец оформления задачи в конце урока. Все заметили, что числа получаются достаточно малыми, и это не должно вводить в заблуждение – ведь речь идёт о вероятностях отдельно взятых, локальных значениях (отсюда и название теоремы). А таковых значений много, и, образно говоря, вероятности «должно хватить на всех». Правда, многие события будут **практически невозможными**. Поясню вышесказанное на примере с монетами: в серии из четырёхсот испытаний орёл теоретически может выпасть от 0 до 400 раз, и данные события образуют **полную группу**:
$P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) + \ldots + P_{400}(199) + P_{400}(200) + P_{400}(201) + \ldots + P_{400}(399) + P_{400}(400) = 1$

Однако большая часть этих значений представляет собой сущий мизер, так, например, вероятность того, что орёл выпадет 250 раз – уже одна десятимиллионная: $P_{400}(250) \approx 0,0000001$. О значениях наподобие $P_{400}(100), P_{400}(350)$ тактично умолчим =). С другой стороны, не следует

недооценивать и скромные результаты: если $P_{400}(225)$ составляет всего около $0{,}00175$, то вероятность того, орёл выпадет, скажем, от 220 до 250 раз, будет весьма заметна. А теперь задумаемся: как вычислить данную вероятность? Не считать же по **теореме сложения вероятностей несовместных событий** сумму: $P_{400}(220)+P_{400}(221)+P_{400}(222)+\ldots+P_{400}(249)+P_{400}(250)$

Гораздо проще эти значения объединить. А объединение чего-либо, как вы знаете, называется **интегрированием**:

ЗАДАЧИ

1. Задача 1: Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 50 и стандартным отклонением 10. Найти вероятность того, что X примет значение от 40 до 60.

Решение: Для этой задачи мы можем использовать локальную теорему Лапласа, чтобы аппроксимировать нормальное распределение.

Z1 = (40 - 50) / 10 = -1
Z2 = (60 - 50) / 10 = 1

Теперь мы можем использовать таблицу значений функции Лапласа, чтобы найти вероятность P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1).

P(Z < 1) = 0.8413
P(Z < -1) = 0.1587
Итак, P(-1 < Z < 1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826.
Ответ: Вероятность того, что X примет значение от 40 до 60, составляет 0.6826.

2. Задача 2:

Случайная величина Y имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 70 и стандартным отклонением 15. Найти вероятность того, что Y больше 80.

Решение:

Аналогично предыдущей задаче, мы можем использовать локальную теорему Лапласа.

Z = (80 - 70) / 15 = 0.67

Используя таблицу значений функции Лапласа, мы находим P(Z < 0.67) = 0.7486.
Ответ: Вероятность того, что Y больше 80, составляет 0.7486.

Использованная литература

1. Абдурахманова Х. К. Математические методы и модели в лёгкой промышленности. — Ташкент: ТИТЛП, 2018.
2. Абдурахманова Х. К. Экономико-математические методы и моделирование производственных процессов лёгкой промышленности. — Ташкент: Фан ва технологиялар, 2021.

3. Абдурахманова Х. К., Ходжаева Н. Б. Математическое моделирование и анализ производственных систем. — Ташкент: ТИТЛП, 2019.
4. Крон Р., Стрик Дж. Линейная алгебра и её приложения. — Москва: Мир, 2016.
5. Гайсин В. А. Применение матричных моделей в экономике и управлении. — Санкт-Петербург: Питер, 2020.