PEDAGOGIK TADQIQOTLAR JURNALI
ISSN: 3060-4923 Impact Factor –7,212

UDK 517.382

KARRALI INTEGRALDA O‘ZGARUVCHILARNI ALMASHTIRISH VA UNING TATBIQLARI

Xudaynazarova Nafisa Mehriddin qizi

Guliston davlat universiteti Matematika yo‘nalishi talabasi,

e-mail: xudoynazarovanafisa455@gmail.com

Doi: https://doi.org/10.5281/zenodo.20394405

Annotatsiya: Mazkur maqolada uch karrali integrallarning xossalari hamda karrali integrallar bilan yechimi topiladigan amaliy masalalarni chuqurroq o‘rganib, u asosida muhim ba’zi bir tengliklarni isbotlaymiz va amaliyotda ko‘p qo‘llaniladigan muhim integrallarning qiymatlarini hisoblaymiz.

Kalit so‘zlar: uch karrali integral, o‘zgaruvchilarni almashtirish, chegaralangan yopiq soha, silindrik koordinatalar sistemasi, sferik koordinatalar sistemasi, elliptik koordinatalar sistemasi, yakobian.

Ushbu ishda uch karrali integralda o‘zgaruvchilarni almashtirish qanday bo‘lishini tushuntirib o‘tamiz.

Fazo xyz to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga, boshqa bir fazo esa $\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga ega bo‘lsin. Bu fazolarda mos ravishda (S) va ( ) sirtlar bilan chegaralangan ikkita (D) va (Δ) yopiq sohalarni qaraylik. Bu sohalar bir – biri bilan quyidagi formulalar

$$\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta,\zeta) \\ y &= y(\xi,\eta,\zeta) \\ z &= z(\xi,\eta,\zeta) \end{aligned} \qquad (1)$$

bilan o‘zaro bir qiymatli uzluksiz munosabat bilan bog‘langan bo‘lsin. Buning uchun ( ) sirtning nuqtalariga (S) sirtning nuqtalari mos kelishi kerak va aksincha.

(1) funksiyalar (Δ) sohada uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. U holda

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)} \qquad (2)$$

Yakobian ham (Δ) sohada uzluksiz funksiya bo‘ladi. Bu ditermenantni har doim noldan farqli va ishorasini saqlasin deb hisoblaymiz.

Agar (Δ) sohada ushbu

$$\xi = \xi(u,v),\ \ \eta = \eta(u,v),\ \ \zeta = \zeta(u,v) \qquad (3)$$

bo‘lakli-silliq sirtni olsak, (1) formula bu sirtni D sohadagi bo‘lakli-silliq sirtga akslantiradi. Bu sirt esa

$$x = x\big(\xi(u,v),\eta(u,v),\zeta(u,v)\big) = x(u,v),\quad y = y(u,v)$$
$$z = z(u,v) \qquad (4)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Silliq sirt bo‘lgan hol uchun qaraylik. Unda maxsus nuqtalar yo‘q, ushbu ditermenantlar

$$\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)},\ \frac{D(\xi,\zeta)}{D(u,v)},\ \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} \qquad (5)$$

bir vaqtda nolga teng emas. U holda ushbu munosabatlar

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)} = \frac{D(y,z)}{D(\eta,\zeta)}\ \frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(y,z)}{D(\xi,\zeta)}\ \frac{D(\xi,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(y,z)}{D(\xi,\eta)}\ \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)},$$

$$\frac{D(z,x)}{D(u,v)} = \frac{D(z,x)}{D(\eta,\zeta)}\ \frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(z,x)}{D(\xi,\zeta)}\ \frac{D(\xi,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(z,x)}{D(\xi,\eta)}\ \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)},$$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\ \frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)}\ \frac{D(\xi,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\ \frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)}$$

noldan farqli.

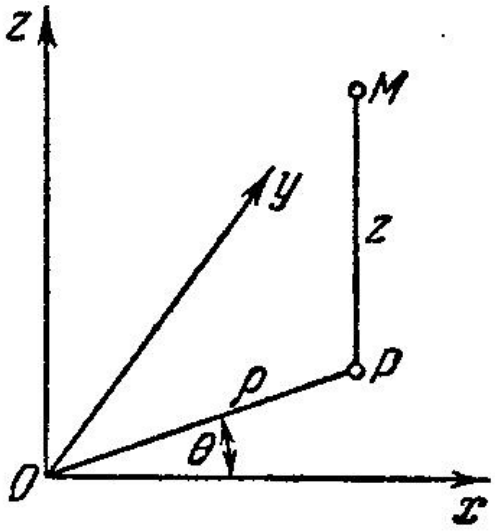
ξ,η,ζ sonlar xyz fazoning nuqtasining qiymatlarini aniqlaydi, yoki shu nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb yuritiladi. xyz tekislikning nuqtasining har bir koordinatasi o‘zgarmas qiymatni saqlaydi va koordinatali sirtni tashkil etadi. Bunday koordinatali sirtlar oilasi hammasi bo‘lib uchtadan iborat bo‘ladi. (D) sohaning har bir nuqtasida bunday koordinatali sirtlar oilasi o‘tadi. (D) va (Δ) sohalarni o‘zaro bir qiymatli mosligi o‘rnatiladi. Ba’zan bu moslik amaliyotda buziladi.

Ba’zi bir koordinatlar sistemasini ko‘rib chiqaylik.

1) Silindrik koordinatalar sistemasi qutb koordinatasi bilan z appilikatali xy tekislik bilan bog‘laydi. Koordinatali ko‘rinishi ushbu

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,\quad z = z$$

formula ko‘rinishidan iborat bo‘ladi.



Bu formulalar yordamida

$0 \quad \rho < + \ , \quad 0 \quad \theta < 2\pi, \quad - \quad < z < +$

soha butun xyz fazoga akslanadi. $\rho = 0, \ z = z$ to‘g‘ri chiziq $(0,0,z)$ nuqtaga akslanadi. Shu holatda o‘zaro bir qiymatli moslik buziladi.

Qaralayotgan hollarda koordinatali sirtlar quyidagicha bo‘ladi.

(a) $\rho = \text{co}nst -$ silindrik sirt oz o‘qiga parallel bo‘ladi: yo‘naltiruvchisi markazi koordinata boshida bo‘lgan xy tekislikdagi aylanadan iboratdir.

(b) $\theta = const -$ oz o‘qidan o‘tuvchi yarim tekislik.

(c) $z = const - xy$ tekislikka parallel tekislik.

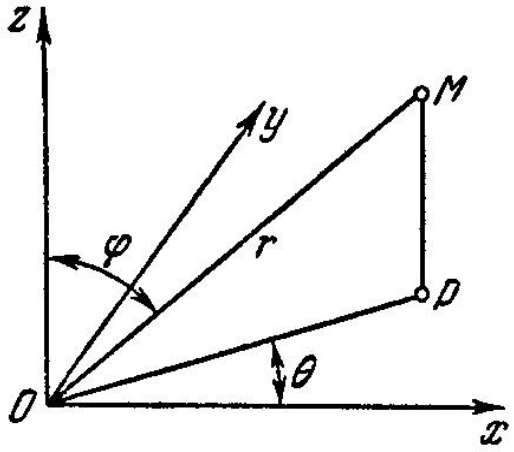
Yuqorida almashtirishning yakobiani

$$\begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = J = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{matrix} = \rho.$$

$\rho = 0$ dan boshqa hollarda yakobian musbat ishorani saqlaydi.

2) Sferik koordinatalar sistemasi fazodagi qutb koordinatalarni Dekart koordinatalari bilan bog‘laydi:

$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi$ bu yerda $0 \quad r < + \ , \quad 0 \quad \varphi \quad \pi, \quad 0 \quad \theta < 2\pi \quad r, \varphi, \theta$ kattaliklarning geometrik ma’nosi rasmda ko‘rsatilgan. $r \quad OM$ kesmaning radius vektori (qutb bilan M nuqtani tutashtiruvchi). $\varphi - \ z$ o‘qi bilan (qutb o‘qi bilan) shu vektor orasidagi burchak, $\theta - OM$ radius vektorni xy tekislikdagi proeksiya $OP = r\sin\varphi$ ni x o‘qi bilan tashkil etgan burchak.



Bu holda ham biz yana o‘zaro bir qiymatli moslikni buzish holiga to‘g‘ri kelamiz. $r\varphi\theta$ fazodagi $r=0$ tekislik $x=y=z=0$ koordinata boshiga akslanadi, $\varphi=0$ (yoki π), $r=r$ to‘g‘ri chiziq $x=y=0,\ z=r$ nuqtaga akslanadi.

Koordinatali sirt uchta oilani tashkil etadi

a) $r=const,$ markazi koordinata boshida bo‘lgan konsentrik sfera.

(b) $\varphi=const,$ balandligi oz o‘qli doiraviy konus .

(c) $\theta=const,$ oz o‘qidan o‘tuvchi yarim tekislik.

Bu almashtirishning yakobiani

$$J=\begin{matrix}\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \\ rco\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi \\ -r\sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & 0\end{matrix}=r^2\sin\varphi$$

ga teng.

$r=0,\ \varphi=0$ (yoki π) hollardan boshqa hollarda yakobian plyus ishorani saqlaydi

Bu holda yakobian nolga teng.

3) Fazoni o‘zini – o‘ziga almashtirish

$$x=\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad y=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\quad z=\frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

formula orqali ifodalanadi.

4) Elliptik koordinatalar sistemasi.

Qo‘sh fokusli va qo‘sh asosli ikkinchi tartibli

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-h^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-R^2}=1\qquad (0<h<R)$$

sirtlar oilasini qaraylik. Bu sirt $\lambda > R$ da ellipsoiddan iborat, $R > \lambda > h$ da ikki pallali giperboliddan iboratdir.

Fazoning har bir (x, y, z) nuqtasi (koordinata tekisliklarida yotmagan) dan har bir tipdagi bittadan sirt o‘tadi. Haqiqatan ham, tenglamaning o‘ng tomonidan

$$\lambda^2(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-R^2)-(\lambda^2-R^2)(\lambda^2-h^2)x^2-$$

$$-\lambda^2(\lambda^2-R^2)y^2-\lambda^2(\lambda^2-h^2)z^2=0$$

ega bo‘lamiz. $\lambda = 0$ da manfiy ishoraga, $\lambda = h$ da musbat ishoraga, $\lambda = R$ da yana manfiy ishoraga, λ dan katta qiymatlarida yana musbat ishoralarga ega bo‘lamiz. Bundan kelib chiqadiki, tenglama uchta musbat ildizga ega:

birinchisi $\lambda > R$ (ellipsoid),

ikkinchisi $\mu < R$, h dan katta (bir pallali giperboloid),

uchunchisi $\nu < h$ da (ikki pallali giperboloid).

Yuqoridagi tenglamaning ildizlari xossasidan foydalanib, λ^2 ga nisbatan kubik tenglama deb qarashimiz mumkin, ya’ni:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=x^2+y^2+z^2+h^2+R^2$$

$$\lambda^2\mu^2+\mu^2\nu^2+\nu^2\lambda^2=(h^2+R^2)x^2+R^2y^2+h^2z^2+h^2R^2;$$

$$\lambda^2\mu^2\nu^2=h^2R^2x^2.$$

Bundan esa

$$x=\pm\frac{\lambda\mu\nu}{hR},\quad y=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\mu^2-h^2)(h^2-\nu^2)}}{h\sqrt{R^2-\nu^2}}$$

$$z=\pm\frac{\sqrt{(\lambda^2-R^2)(R^2-\mu^2)(R^2-\nu^2)}}{R\sqrt{R^2-h^2}}$$

bo‘lishini topamiz. λ, μ, ν sonlarni nuqtaning egri chiziqli koordinatalari deb qarash mumkin. Ya’ni, elliptik koordinatalar deb ataymiz. Uchta koordinatali sirtlar sifatida yuqoridagi sirtlar deb (ellipsoid, bir pallali giperboloid, ikki pallali giperboloid) qarash mumkin.

Almashtirishning yakobiani

$$J=\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-h^2)(\lambda^2-R^2)(\mu^2-h^2)(R^2-\mu^2)(h^2-\nu^2)(R^2-\nu^2)}}$$

ko‘rinishdan iborat.

xyz fazodagi (D) jismning hajmini uch karrali integral orqali ifodalagan edik. Endi bu jismning $\xi\eta\zeta$ fazodagi mos (Δ) jismning hajmini hisoblaymiz.

(D) jismning hajmi ikkinchi tur sirt integrali orqali

$$D = \int\limits_{(\Delta)} z\,dxdy$$

hisoblanadi. (D) sohaning hajmini egri chiziqli koordinatalar sistemasiga o‘tib hisoblaymiz. Buning uchun sirtning parametrik tenglamasidan foydalanamiz [2-4].

$$C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

deb faraz qilib, ushbu formulaga

$$D = \int\limits_{(E)} zC\,dudv$$

egamiz. (E) soha uv tekislikda o‘zgaradi.

Shuningdek, x, y o‘zgaruvchi u, v ga bog‘liq, ξ, η, ζ o‘zgaruvchiga nisbatan

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\,\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\,\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\,\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. C ning qiymatini yuqoridagi integralga qo‘yamiz va

$$D = \int\limits_{(E)} z\,\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\,\frac{D(\xi,\eta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}\,\frac{D(\eta,\zeta)}{D(u,v)} + \frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}\,\frac{D(\zeta,\xi)}{D(u,v)}\,dudv \quad (6)$$

topamiz.

Bu integralni ikkinchi tur sirt integralga qo‘yamiz va ( ) sirtning tashqi tomoni bo‘yicha integral:

$$\int\limits_{(\ )} z\,\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta + \frac{D(x,y)}{D(\eta,\zeta)}d\eta d\zeta + \frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)}d\xi d\zeta \quad (7)$$

Integralga Ostrogradskiy formulasini qo‘llaysak

$$D = \pm \int\limits_{(\Delta)} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(z\,\frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(z\,\frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(z\,\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}\right) d\xi d\eta d\zeta \quad (8)$$

(Δ) soha bo‘yicha uch karrali integralni hosil qilamiz.

Integral ostidagi ifoda

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)}+\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}+$$

$$+z\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)}+\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\zeta)}+\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\eta)}$$

teng. Yig‘g‘indida birinchi qo‘shiluvchi yakobianga teng, ya’ni

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{vmatrix}.$$

Ikkinchi qo‘shiluvchilar nolga teng, ya’ni

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{D(x,y)}{D(\eta,\xi)}=\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \zeta}-\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{D(x,y)}{D(\zeta,\xi)}=\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \zeta\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}=\frac{\partial^2 x}{\partial \zeta\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta\partial \zeta}-\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\partial \zeta},$$

barchasini qo‘shib chiqsak chap tomoni ikkinchi qo‘shiluvchiga teng, o‘ng tomoni nolga teng bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$D=\pm\int_{(\Delta)}\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}d\xi d\eta d\zeta$$

formulaga kelamiz. $\pm$ ishora yakobianning ishorasiga qarab tanlanadi. U holda hosil qilingan natijani ushbu ko‘rinishda

$$D=\pm\int_{(\Delta)}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right|d\xi d\eta d\zeta \quad (9)$$

yozish mumkin yoki yakobianni qisqacha $J(\xi,\eta,\zeta)$ orqali ifodalasak:

$$D = \pm \int\limits_{(\Delta)} \left|J(\xi,\eta,\zeta)\right| d\xi d\eta d\zeta \ .(10)$$

Integral ostidagi ifoda

$$\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}\right| d\xi d\eta d\zeta = \left|J(\xi,\eta,\zeta)\right| d\xi d\eta d\zeta$$

Egri chiziqli koordinatalardagi hajm elementi deyiladi [2-4].

Egri chiziqli koordinatalarda hajm elementi yordamida uch karrali integralda o‘zgaruvchilarni almashtirishning umumiy formasini keltirish mumkin.

xyz va $\xi\eta\zeta$ fazolardagi (D) va (Δ) sohalar orasidagi (1) moslik o‘rnatilgan bo‘lsin. (3) formuladagi barcha shartlar bajarilgan deb hisoblab ushbu tenglik

$$\int\limits_{(D)} f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \int\limits_{(\Delta)} f\left(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\right)\left|J(\xi,\eta,\zeta)\right| d\xi d\eta d\zeta \quad (11)$$

bu yerda $J(\xi,\eta,\zeta) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(\xi,\eta,\zeta)}$, o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Bunda $f(x,y,z)$ funksiyani uzluksiz deb faraz qilamiz va chekli sondagi bo‘lakli-silliq sirtlarda uzilishga ega bo‘lsin.

Isbotlash uchun (D) va (Δ) bo‘lakli-silliq sirtli sohalarni (D_i) va (Δ_i) $(i = 1,2,...,n)$ elementar bo‘laklarga yoyamiz. Har bir (D_i), (Δ_i) sohaga (2) formulani qo‘llab

$$D_i = \left|J(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i)\right| \Delta_i \qquad (11)$$

hosil qilamiz. Bu erda $(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i)$ nuqta (Δ_i) sohadagi biror nuqta. Bunga mos $(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i)$ nuqtani (D_i) sohadan tanlaymiz va

$$\overline{x}_i = x_i(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i),\ \overline{y}_i = y_i(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i),\ \overline{z}_i = z_i(\overline{\xi}_i, \overline{\eta}_i, \overline{\zeta}_i) \qquad (12)$$

deb faraz qilamiz.

(10) integralning birinchisi uchun integral yig‘indi tuzamiz.

$$\sigma = \sum_i f(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i) D_i.$$

Bunga $\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i$ larning (2) dagi ifodasini va $D_i$ni o‘rniga (1) ifodani qo‘yib

$$\sigma = \sum_i f\left(x_i\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right),y_i\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right),z_i\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right)\right)\left|J\left(\bar{\xi}_i,\bar{\eta}_i,\bar{\zeta}_i\right)\right|\Delta_i$$

yig‘indiga kelamiz.

(Δ_i) sohaning diametrini nolga intiltirsak, uzluksizlikka ko‘ra (D_i) ning diametri ham nolga intiladi. σ yig‘indi bir vaqtda ikki integralga ham intiladi va (10) formula hosil bo‘ladi.

Endi ba’zi misollar keltiramiz [6].

1-misol. Ushbu

$$I = \iiint_{(V)} \frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz$$

integralni hisoblang. Bu yerda (V) yuqoridan $\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^2xy$ sirt bilan, pastdan $z=0$ tekislik bilan chegaralangan jism.

Sferik koordinatalarga o’tamiz. U holda yuqoridagi sirt tenglamasi

$$r^2 = a^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta,$$

ko’rinishga keladi. Berilgan integral esa, jism z o‘qiga nisbatan cimmetrik bo‘lgani uchun quyidagiga almashadi:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta dr =$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^3\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{a^4}{144}.$$

2-misol. Ushbu

$$K = \iiint_{(V)} \frac{xyzdxdydz}{x^2+y^2+z^2}$$

integaral hisoblansin. Bu yerda (V) - uch yoqli ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \quad 1.$

Umumlashgan sferik koordinatalarga o‘tamiz.

$$x = ar\sin\varphi,\ y = br\sin\varphi\sin\theta,\ z = cr\cos\varphi,$$

$$J = abcr^2\sin\varphi.$$

Unda integral

$$K = a^2b^2c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{1} r^2 \frac{\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta dr d\varphi d\theta}{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + c^2\cos^{2\varphi}}$$

ko‘rinishga keladi. $\sin^2\varphi = u,\ \sin^2\theta = v$ almashtirish bajarsak, u holda

$$K = \frac{a^2b^2c^2}{8\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)}\ b^2c^2\ln\frac{c}{b} + c^2a^2\ln\frac{a}{c} + a^2b^2\ln\frac{b}{a}$$

teng bo‘ladi.

Adabiyotlar ro‘yxati :

1. Г.Фихтенгольц. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», Том I, II, III. Москва, «Физматлит», 2001.
2. G.Xudoyberganov, A.Vorisov, H.Mansurov. «Matematik analiz», 1-, 2-qism, Qarshi, «Nasaf», 2003.
3. Tao T. Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
4. T.Azlarov, H.Mansurov, «Matematik analiz asoslari», Toshkent, O‘zMU nashriyoti, 2005.
5. К.Жамуратов, Д.Абдухалимов, «ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИК ВА ПРОЕКТИВ ТЕКИСЛИКНИНГ БИР ЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАРИ» Международный научно-образовательный электронный журнал «ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА В XXI ВЕКЕ». Выпуск №68-3 (том 2) (ноябрь, 2025), 334-344.
6. Жамуратов К., Умаров Х.Р., Холбоев С. Решение одной задачи теории фильтрации методом квазистационарного приближения. ГулДУ ахборотномаси, №2, 2016 йил, 9-13 бетлар.
7. A.Sa’dullaev, H.Mansurov, G.Xudoyberganov, A.Vorisov, R.G‘ulomov «Matematik analiz kursidan misol va masalalar to‘plami», 1-, 2- tom, Toshkent, «O‘zbekiston» – 1993, 1996.
8. Б.П.Демидович, «Сборник задач и упражнений по математическому анализу», Изд. 13-е, Москва, «ЧеРо», 1997.
9. Жамуратов, К., Умаров, Х. Р., & Турдимуродов, Э. М. (2024). *О решении методом регуляризации одной системы функциональных уравнений с дифференциальным оператором* (Doctoral dissertation, Белорусско-Российский университет)
10. Umarov, K.R. (2025). Methods For Construction Of The Zhegalkin Polynomial. *TLEP–International Journal of Multidiscipline*, *2*(5), 76-79.
11. Umarov, X., & Goyibnazarov, K. (2025, October). Some Principles Of Creative Training And Education Of Modern Youth. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 91-93).

12. Goyibnazarov, K., & Umarov, X. (2025, October). Biological Applications Of The Definite Integral. In *International Conference on Global Trends and Innovations in Multidisciplinary Research* (Vol. 1, No. 4, pp. 84-87).

13. Narjigitov, X., Umarov, X. R., & Kuchkarova, S. I. (2026). CHIZIQLI INTEGRAL TENGLAMALARNI YECHISH USULLARI TARIXI HAQIDA. *SHOKH LIBRARY*, *1*(1).

14. Umarov X.R., Abduraximova D.D. “MATEMATIKADAN OLIMPIADA MASALALARINI YECHISHDA MATEMATIK ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” / Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 68-74.

15. Umarov X.R., Asqarbekova D.J. // “НАТУРАЛ СОНЛАР ҚАТОРИ ДАРАЖАЛАРИ ЙИҒИНДИСИНИ ТОПИШНИНГ БИР УСУЛИ” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). Дата выхода в свет: 31.01.2025. с. 74-84.

16. Umarov X.R., Erkinov Sh.B. // “YIG‘INDI VA KO‘PAYTMALARNI HISOBLASHDA KOMPLEKS ANALIZ METODLARIDAN FOYDALANISH” Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №68 (том 2) (январь, 2025). с. 84-103.

17. Наржигитов Х., Умаров Х. «БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛ» “Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirishning zamonaviy holati va istiqbollari” mavzusida ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami – Guliston, 2022 y.

18. Умаров Х.Р., Эгамбердиева С.Н. АЙРИМ ХОСМАС ИНТЕГРАЛЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА ЧЕГИРМАЛАР НАЗАРИЯСИДАН ФОЙДАЛАНИШ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр, 161-177.

19. Umarov X.R., Abdurasulov O.U. O‘LCHOVLI FUNKSIYALAR FAZOSI UCHUN DUALLIK PRINSIPI Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025). стр. 178-188.

20. Х.Умаров, З.Олимов. КЕТМА-КЕТЛИКЛАР l^p ФАЗОСИДАГИ ФУНКЦИОНАЛЛАРНИНГ УМУМИЙ КЎРИНИШИ. Международный научно-практический электронный журнал «МОЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ КАРЬЕРА». Выпуск №78 (том 1) (ноябрь, 2025) Стр. 189-193.